

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 1 (57)

2021

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Желтикова О. О.** О гладкой и нигде не равной нулю плотности распределения решения стохастического дифференциального уравнения на многообразии 3
- Смолякин Е. Ю., Снегур М. О.** Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое 10
- Митрохин С. И.** Об изучении спектра семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака 20
- Трифенова Е. Е.** О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей 39
- Шеина К. И.** Базовые автоморфизмы картановых слоений, накрытых расслоениями 49
- Бойков И. В., Айкашев П. В.** Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов 66
- Смирнов Ю. Г., Смолякин Е. Ю.** Исследование задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем 85
- Деревянчук Е. Д., Лапич А. О., Снегур М. О.** Численный метод решения задачи о распространении ТЕ-поляризованных волн в многослойном неоднородном волноводе кругового сечения, заполненном метаматериалом 102

ФИЗИКА

- Прощенко Д. Ю., Голик С. С., Майор А. Ю., Ильин А. А., Боровский А. В., Букин О. А.** Разработка метода лазерной искровой спектроскопии для задач геологоразведки и экологического мониторинга водных сред в режиме реального времени 112

ЮБИЛЕИ

- К семидесятилетию со дня рождения Потапова Александра Алексеевича 120

**UNIVERSITY PROCEEDINGS
VOLGA REGION
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 1 (57)

2021

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Zheltikova O.O.</i> On a smooth and nowhere equal to zero distribution density of a stochastic differential equation's solution on manifold	3
<i>Smol'kin E.Yu., Snegur M.O.</i> Numerical investigation of the TE-polarized complex electromagnetic waves in an open nonhomogeneous layer.....	10
<i>Mitrokhin S.I.</i> On the studying the spectrum of differential operators' family whose potentials converge to the Dirac delta function.....	20
<i>Trifonova E.E.</i> On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers.....	39
<i>Sheina K.I.</i> Basic automorphisms of cartan foliations covered by fibrations	49
<i>Boykov I.V., Aykashev P.V.</i> Approximate methods for calculating hypersingular integrals.....	66
<i>Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu.</i> Problem research of an open circular waveguide normal waves with an inhomogeneous chiral layer.....	85
<i>Derevyanchyk E.D., Lapich A.O., Snegur M.O.</i> A numerical method for solving the problem of TE-polarized waves' propagation in a multilayer inhomogeneous circular waveguide filled with a metamaterial	102

PHYSICS

<i>Proshchenko D.Yu., Golik S.S., Mayor A.Yu., Il'in A.A., Borovskiy A.V., Bukin O.A.</i> Development of a laser-induced breakdown spectroscopy method for the issues of geological exploration and ecological monitoring of aquatic environments in real time	112
--	-----

ANNIVERSARIES

Devoted to the 70th birthday of Potapov Aleksandr Alekseevich	120
---	-----

УДК 517.958

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-1

О гладкой и нигде не равной нулю плотности распределения решения стохастического дифференциального уравнения на многообразии

О. О. Желтикова

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского
и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Россия

ksu_ola@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Производные в среднем были введены Э. Нельсоном и со временем они стали изучаться как отдельный класс стохастических дифференциальных уравнений. В данной работе применяется аппарат производных в среднем для нахождения условий, при которых плотности вероятности решения стохастического дифференциального уравнения на односвязном многообразии C^∞ -гладкие и нигде не равны нулю. Используется так называемое соглашение Эйнштейна о суммировании, т.е. символом $\frac{\partial}{\partial x^i}$ обозначается и i -я частная производная

в карте, и i -й вектор базиса в касательном пространстве. *Материалы и методы.* В исследовании используются методы стохастического анализа на многообразиях. *Результаты.* Найдены достаточные условия, при которых плотность распределения решения стохастического дифференциального уравнения на односвязном многообразии является C^∞ -гладкой функцией, нигде не равной нулю. *Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы для исследования вопросов существования решений стохастических дифференциальных уравнений и включений на многообразиях.

Ключевые слова: производные в среднем, односвязные многообразия, плотность распределения, стохастические дифференциальные уравнения на многообразиях

Финансирование: исследование поддержано грантом РФФИ 18-01-00048.

Для цитирования: Желтикова О. О. О гладкой и нигде не равной нулю плотности распределения решения стохастического дифференциального уравнения на многообразии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 3–9. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-1

On a smooth and nowhere equal to zero distribution density of a stochastic differential equation's solution on manifold

O.O. Zheltikova

Air Force Academy named after professor N.Ye. Zhukovsky
and Yu.A. Gagarin, Voronezh, Russia

ksu_ola@mail.ru

© Желтикова О. О., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstract. Background. E. Nelson [1-3] introduced derivatives on the average in the works and over time, they began to be studied as a separate class of stochastic differential equations. In the work presented in this paper, the machinery of mean derivatives is applied to finding conditions, under which the probability density functions of solutions of stochastic differential equation on simply connected manifold are C^∞ -smooth and nowhere equal to zero. In the paper, Einstein's summation convention with respect to shared upper and lower indices is used. The symbol $\frac{\partial}{\partial x^i}$ denotes both the partial derivative in the chart, and the

vector of basis in the tangent space. **Materials and methods.** The study uses methods of stochastic analysis on manifolds. **Results.** The sufficient conditions are obtained, under which the probability density function of the solution of stochastic differential equation on simply connected manifold are C^∞ -smooth and nowhere equal to zero. **Conclusions.** Obtained results can be used for investigation of solution existence for stochastic differential equations and inclusions on manifolds.

Keywords: Mean derivatives, density of distribution, simply connected manifolds, stochastic differential equations on manifolds

Acknowledgments: the research is supported by the RFBR grant 18-01-00048.

For citation: Zheltikova O.O. On a smooth and nowhere equal to zero distribution density of a stochastic differential equation's solution on manifold. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1:3–9. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-1

Введение

Производные в среднем впервые появились в 60-х гг. XX в. Они были введены Э. Нельсоном [1–3], который использовал их в построенной им стохастической механике – аналоге квантовой механики. В работах [4, 5] С. В. Азариной и Ю. Е. Гликлих был построена производная в среднем второго порядка, связанная с коэффициентом диффузии – квадратичная производная в среднем. После этого стало возможным поставить задачу о нахождении случайного процесса по его производным в среднем, ведь производная в среднем первого порядка описывает снос стохастического процесса, а квадратичная, как говорилось ранее, связана с коэффициентом диффузии. В работах [6, 7] введены определения производных в среднем и квадратичной производной на многообразиях. В дальнейшем в работах Ю. Е. Гликлиха с соавторами исследовались вопросы существования решений стохастических дифференциальных уравнений, записанных в терминах производных в среднем.

1. Производные в среднем на многообразии

Пусть M – гладкое односвязное многообразие размерности n . Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P) . Каждый стохастический процесс $\xi(t)$ (см., например [1]), заданный на отрезке $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$ со значениями в M , определяет три семейства σ -подалгебр σ -алгебры F : «прошлые» P_t^ξ , порожденное прообразами борелевских множеств на M при всех отображениях $\xi(s): \Omega \rightarrow M$ для $0 < s < t$; «будущее» F_t^ξ , порожденное аналогичным образом для $t < s < T$; «настоящее» N_t^ξ , порожденное самим отображением $\xi(t)$. Будем считать, что данные семейства являются полными, т.е. содержат

все множества меры нуль. Пусть E_t^ξ – условное математическое ожидание относительно σ -подалгебры N_t^ξ .

Возьмем нормальную карту U_m связности H в определенной точке $m \in M$. Тогда для любой точки m' из карты U_m можно найти регрессии:

$$Y^0(t, m') \Big|_{U_m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[\left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right) \Big|_{U_m} \middle| \xi(t) = m' \right],$$

$$Y_*^0(t, m') \Big|_{U_m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[\left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) \Big|_{U_m} \middle| \xi(t) = m' \right].$$

Построим векторное поле $Y^0(t, \cdot)$, которое каждой точке $m \in M$ ставит в соответствие вектор $Y^0(t, m') \Big|_{U_m}$ в U_m . Тогда, по построению, Y^0 является измеримым сечением касательного расслоения TM , т.е. векторным полем.

Определение 1. Случайные векторы $D^H \xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*^H \xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$ называются производной в среднем справа и, соответственно, слева процесса $\xi(t)$ на M в момент времени t относительно связности H . $D_S \xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$ и $D_A \xi(t) = u^\xi(t, \xi(t))$ называются соответственно текущей и осмотической скоростями процесса $\xi(\cdot)$, где

$$v^\xi(t, \xi(t)) = \frac{1}{2} \left(Y^0(t, \xi(t)) + Y_*^0(t, \xi(t)) \right) \text{ и } u^\xi(t, \xi(t)) = \frac{1}{2} \left(Y^0(t, \xi(t)) - Y_*^0(t, \xi(t)) \right).$$

Показано, что текущая и осмотическая скорости не зависят от выбора связности.

Определение 2. Предел

$$D_2 \xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\Delta \xi(t) \otimes \Delta \xi(t)}{\Delta t} \right),$$

где знаком $\otimes$ обозначено тензорное произведение в модельном пространстве, содержащем карту, называется квадратической производной в среднем процесса $\xi(t)$ на M в момент времени t .

Показано, что квадратическая производная в среднем не зависит от выбора связности и что для диффузионного процесса квадратическая производная существует и совпадает с коэффициентом диффузии. Также отметим, что поле квадратических производных на M является $(2,0)$ -тензорным полем неотрицательно определенных матриц.

2. Уравнения Ито на многообразиях

Пусть $a(t, m)$ является измеримым по Борелю векторным полем на многообразии M , а $A(t, m)$ – измеримым по Борелю полем линейных операторов.

ров $A(t, m): \mathbb{R}^k \rightarrow T_m M$ для достаточно больших k и $t \in [0, T]$. Рассмотрим экспоненциальное отображение связности H . Пусть $w(t)$ – винеровский процесс на $\mathbb{R}^k$. Следуя [8], назовем пару (a, A) векторным полем Ито на M . Это название вызвано тем, что при замене локальных координат в M векторное поле (a, A) изменяется как касательный вектор.

Определение 3. Стохастическим дифференциалом

$$a(t, m)dt + A(t, m)dw(t),$$

образованным векторным полем Ито (a, A) в точке $m \in M$, назовем класс случайных процессов в $T_m M$, который состоит из всех решений следующего дифференциального уравнения:

$$X(s) = \int_t^s \hat{a}(\tau, x) d\tau + \int_t^s \hat{A}(\tau, x) dw(\tau),$$

где $\hat{a}(t, x)$ – векторное поле на $T_m M$; $\hat{A}(t, x)$ – поле линейных операторов из $\mathbb{R}^k$ в $T_m M$, причем они липшецевы, обращаются в ноль вне некоторой окрестности нуля в $T_m M$. При этом $\hat{a}(t, 0) = a(t, m)$, $\hat{A}(t, 0) = A(t, m)$.

Определение 4. Процесс $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению Ито в форме Белопольской – Далецкого

$$d\xi(t) = \exp_{\xi(t)}(a(t, \xi(t))dt + A(t, \xi(t))dw(t)), \quad (1)$$

если для любой точки $\xi(t)$ существует окрестность в M такая, что процесс $\xi(t+s)$, $s \geq 0$, почти наверняка совпадает с некоторым процессом из класса

$$\exp_{\xi(t)}(a(t, \xi(t))dt + A(t, \xi(t))dw(t))$$

до того, как выйдет из указанной выше окрестности процесса $\xi(t)$.

Решение уравнения (1) в смысле определения 4 мы называем диффузионным процессом на M .

3. Основные результаты

Рассмотрим диффузионный процесс $\xi(t)$ на M , удовлетворяющий уравнению (1). Обозначим матрицы его поля квадратичных производных символом $(\alpha^{ij}(x))$. Всюду ниже мы предполагаем, что это поле C^∞ -гладко и состоит из положительно определенных (т.е. невырожденных) матриц. Векторное поле осмотических скоростей процесса $\xi(t)$ обозначим через $u(t, x)$. Мы предполагаем, что оно также C^∞ -гладко.

Пусть $\rho(t, x)$ – плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно меры Лебега λ на $\mathbb{R} \times M$. Это означает, что для каждого $[0, T] \subset \mathbb{R}$ и любой функции $f: [0, T] \times M \rightarrow \mathbb{R}$, которая является ограниченной и непрерывной, выполняется соотношение

$$\int_0^T E(f(t, \xi(t))) dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} f(t, \xi(t)) dP \right) dt = \int_{[0, T] \times M} f(t, x) \bar{\rho}(t, x) d\lambda.$$

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ – диффузионный процесс с осмотической скоростью $u(t, x)$, коэффициентами диффузии (α^{ij}) и плотностью ρ . Тогда при условии, что ρ гладко и нигде не равно нулю,

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha^{ij}(t, x) \rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1)$$

Данное утверждение следует из [9, Теорема 1.1] или из [10, формула (2.8)].

Теорема 2. Пусть диффузионный процесс $\xi(t)$ на односвязном многообразии M корректно определен на отрезке $[0, T]$ и плотность ρ_0 начального значения ξ_0 является C^∞ -гладкой и нигде не равной нулю. Пусть также осмотическая скорость $u(t, x)$ является C^∞ -гладкой, а квадратическая производная в среднем $\alpha(t, x)$ является C^∞ -гладкой и положительно определенной (т.е. невырожденной) при всех t и x . Тогда плотность $\rho(t, x)$ является C^∞ -гладкой и нигде не равной нулю при всех t и x .

Доказательство. Введем $p_{(t)}(x) = \ln \rho(t, x)$ (следовательно $\rho(t, x) = e^{p_{(t)}(x)}$). Тогда формула (1) преобразуется к виду

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha^{ij}(t, x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \alpha^{ij}(t, x) dp \right), \quad (2)$$

где d – внешний дифференциал.

Так как поле матриц $\alpha^{ij}(t, x)$ гладко и не вырождено, существует гладкое поле обратных матриц $(\alpha_{ij}(t, x))$. Применив данное поле матриц к выражению (2), получим

$$dp(t, x) = 2u(x, t) - \frac{\partial \alpha^{ij}(t, x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Обозначим через A^i i -ю координату вектора в правой части последнего равенства, а через $(dp_{(t)})_j$ – j -ю координату 1-формы $dp_{(t)}$ (полный дифференциал $p_{(t)}$ по пространственным переменным). Тогда $dp_j = (\alpha_{ij}(t, x)) A^i$, и, таким образом, $dp_{(t)}$ известно. Подчеркнем, что $dp_{(t)}$ задано для любого фиксированного t и $dp_{(t)}$ гладко по t по построению.

Восстановим $p_{(t)}$ из $dp_{(t)}$ с точностью до аддитивной константы. Для этого зафиксируем некоторое значение $p_{(t)}$ в некоторой точке x_0 . Для любого $x \in M$ построим значение $p_{(t)}(x)$ при любом фиксированном t следующим образом. Пусть $\sigma(s)$ – кривая, соединяющая x_0 и x . Зададим значение $p_{(t)}(x) = \int_{\sigma} dp_{(t)}$. Возьмем другую кривую $\sigma_1(s)$, соединяющую x_0 и x , изменим ориентацию на σ_1 и рассмотрим объединение σ и σ_1 как одномерное подмногообразие в M . Так как M односвязно, указанная петля стягивается по M в точку, т.е. является границей $\partial\Theta$ некоторого 2-мерного подмногообразия Θ в M (можно взять любое такое подмногообразие). Тогда по теореме Стокса $\int_{\partial\Theta} dp_{(t)} = \iint_{\Theta} ddp_{(t)}$. Поскольку $d^2 = 0$, $\int_{\partial\Theta} dp_{(t)} = 0$, то значение $p_{(t)}(x)$ не зависит от выбора кривой σ . По построению $\rho = e^p$ положительно при всех (t, x) . Поскольку p определено с точностью до аддитивных констант, ρ определено с точностью до мультипликативных констант. Следовательно, среди функций $\rho(t, x)$, построенных таким образом, при каждом фиксированном t существует такая функция, что $\int_M \rho \lambda = 1$, т.е. эта функция является плотностью распределения на M . Тот факт, что построенная плотность вероятности C^∞ -гладкая, следует из построения. Теорема доказана.

Заключение

В статье получены условия существования C^∞ -гладкой и нигде не равной нулю при всех t и x плотности распределения решения стохастического дифференциального уравнения $\rho(t, x)$ на односвязном многообразии, что в дальнейшем может быть использовано для доказательства существования сильных решений стохастических дифференциальных уравнений с осмотическими скоростями на многообразиях.

Список литературы

1. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews. 1966. Vol. 150, № 4. P. 1079–1085.
2. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton : Princeton University Press, 1967. 142 p.
3. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton : Princeton University Press, 1985. 147 p.
4. Азарина С. В., Гликлик Ю. Е. Дифференциальные уравнения и включения с производными в среднем справа в $\mathbb{R}^n$ // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Физика. Математика. 2006. № 2. С. 138–146.
5. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. Differential Inclusions with Mean Derivatives // Dynamic Systems and Applications. 2007. Vol. 16, № 1. P. 49–72.
6. Гликлик Ю. Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. М. : Комкнига, 2005. 414 с.
7. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. On differential equations and inclusions with mean derivatives on a compact manifold // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2007. Vol. 27, № 2. P. 385–397.

8. Далецкий Ю. Л., Белополюская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. Киев : Выщ. шк., 1989. 295 с.
9. Cresson J., Darses S. Stochastic embedding of dynamical systems // *Journal of Mathematical Physics*. 2007. Vol. 48. P. 072703-1–072303-54.
10. Hausmann U. G., Pardoux E. Time reversal diffusions // *The Annals of Probability*. 1986. Vol. 14, № 4. P. 1188–1206.

References

1. Nelson E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Phys. Reviews*. 1966;150(4):1079–1085.
2. Nelson E. *Dynamical theory of Brownian motion*. Princeton: Princeton University Press, 1967:142.
3. Nelson E. *Quantum fluctuations*. Princeton: Princeton University Press, 1985:147.
4. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential equations and inclusions with derivatives in the mean on the right in $\mathbb{R}^n$. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Fizika. Matematika = Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2006;2:138–146. (In Russ.)
5. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential Inclusions with Mean Derivatives. *Dynamic Systems and Applications*. 2007;16(1):49–72.
6. Gliklikh Yu.E. *Global'nyy i stokhasticheskiy analiz v zadachakh matematicheskoy fiziki = Global and stochastic analysis in problems of mathematical physics*. Moscow: Komkniga, 2005:414. (In Russ.)
7. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. On differential equations and inclusions with mean derivatives on a compact manifold. *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*. 2007;27(2):385–397.
8. Daletskiy Yu.L., Belopol'skaya Ya.I. *Stokhasticheskie uravneniya i differentsial'naya geometriya = Stochastic equations and differential geometry*. Kiev: Vyssh. shk., 1989;295. (In Russ.)
9. Cresson J., Darses S. Stochastic embedding of dynamical systems. *Journal of Mathematical Physics*. 2007;48:072703-1–072303-54.
10. Hausmann U.G., Pardoux E. Time reversal diffusions. *The Annals of Probability*. 1986;14(4):1188–1206.

Информация об авторах / Information about the authors

Ольга Олеговна Желтикова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры 206 математики,
Военный учебно-научный центр военно-
воздушных сил «Военно-воздушная
академия имени профессора
Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»
(Россия, г. Воронеж, ул. Старых
Большевиков, 54А)

E-mail: ksu_ola@mail.ru

Ol'ga O. Zheltikova

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department 206 of mathematics,
Military Educational and Scientific Center
of the Air Force “Air Force Academy
named after professor N. Ye. Zhukovsky
and Yu. A. Gagarin” (54A Starykh
Bolshevikov street, Voronezh, Russia)

Поступила в редакцию / Received 31.08.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 17.09.2020

Принята к публикации / Accepted 15.12.2020

УДК 519.63: 621.372.8
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое

Е. Ю. Смолькин¹, М. О. Снегур²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹e.g.smolkin@hotmail.com, ²snegur.max15@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – численное исследование ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном различными диэлектрическими материалами. *Материалы и методы.* Для получения численного решения задачи применяется метод пристрелки по параметру. *Результаты.* Численно найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны. *Выводы.* Указанный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, метод пристрелки

Финансирование: работа поддержана грантом Российского научного фонда № 20-11-20087.

Для цитирования: Смолькин Е. Ю., Снегур М. О. Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 10–19. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

Numerical investigation of the TE-polarized complex electromagnetic waves in an open nonhomogeneous layer

E.Yu. Smol'kin¹, M.O. Snegur²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹e.g.smolkin@hotmail.com, ²snegur.max15@gmail.com

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to study numerically TE-polarized waves in a layer filled with various dielectric materials. *Material and methods.* In order to obtain a numerical solution to the problem, the parameter shooting method is used. *Results.* Complex and propagating leaky waves, complex and propagating surface waves were numerically found. *Conclusions.* The proposed numerical method is an effective way to find an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves.

Keywords: propagation of electromagnetic waves, TE-waves, Maxwell's equation, differential equations, shooting method

Acknowledgments: the work is supported by the Russian Science Foundation grant No. 20-11-20087.

For citation: Smol'kin E.Yu., Snegur M.O. Numerical investigation of the TE-polarized complex electromagnetic waves in an open nonhomogeneous layer. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021;1:10–19. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

© Смолькин Е. Ю., Снегур М. О., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Анализ спектра вещественных и комплексных волн в открытых волноведущих структурах менее развит по сравнению с теорией экранированных волноводов, которая входит во многие учебники и монографии по электромагнетизму. Диэлектрический слой (ДС) является одной из наиболее хорошо изученных волноведущих структур в электродинамике [1–4]. Фактически диэлектрический слой является самым простым волноводом (с геометрической точки зрения), его дисперсионное уравнение можно записать в явном виде. Такая структура широко используется на практике (плоские оптические волноводы – линзы). Однако до сих пор нет точных доказательств наличия (или отсутствия) бесконечного числа вещественных или комплексных собственных волн, распространяющихся в ДС.

Актуальной задачей при изучении волноводов является классификация волн, существующих в структуре. В статье предложен численный метод расчета постоянных распространения ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом соответственно. Расчеты произведены на разных частотах. Таким образом, численно найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

В статьях [5, 6] выполнено численное исследование плоских диэлектрических и металл-диэлектрических волноводов. Численные результаты получены с помощью одного из вариантов метода пристрелки по параметру (см., например, [7, 8]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$, заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\epsilon_c \epsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитную проницаемость $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h\}.$$

Граница $x = h$ – это проекция диэлектрической поверхности. Граница $x = 0$ – проекция идеально проводящего экрана.

Мы предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $\exp(i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Определение ТЕ-поляризованных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла, зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

с граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на идеально проводящем экране

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

и условием непрерывности тангенциальной составляющей электрического и магнитного поля на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости $x = h$:

$$[E_y]|_{x=h} = 0, \quad [H_z]|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где $[f]|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что мы хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Мы также предполагаем, что $\epsilon(x) > \epsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, т.е. $\epsilon(x) \in C[0, h]$ и $\text{Im} \epsilon(x) = 0$.

Задача о ТЕ-поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волноводной структуры.

Поле нормальной волны в волноводе можно представить с помощью одной скалярной функции:

$$u := E_y(x). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной составляющей электрического поля u .

Принята следующая классификация волн [1–4]:

- По параметру γ – постоянной распространения:

Определение 1. Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ .

Определение 2. Затухающая волна характеризуется чисто мнимым параметром γ .

Определение 3. Комплекс волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $\text{Re} \gamma \text{Im} \gamma \neq 0$.

- По условию на бесконечности:

Определение 4. Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$.

Определение 5. Вытекающая волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Постоянная распространения γ характеризует поведение волны (распространяющаяся, затухающая или комплексная) в z -направлении. Классификация волн поверхностных или вытекающих зависит от поведения в x -направлении.

Мы имеем следующую задачу на собственные значения для касательной компоненты электрического поля u : найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon} - \gamma^2) u = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

и условиям сопряжения

$$[u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0. \quad (8)$$

При $x > h$ мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c$; из (6) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (9)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = e^{(h-x)\lambda}, \quad x > h, \quad (10)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_c$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр. Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$, мы имеем поверхностную волну. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$, мы имеем вытекающую волну.

При $0 < x < h$ мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon(x)$; тогда из (6) получаем уравнение

$$u'' + (\eta - \lambda^2) u = 0, \quad (11)$$

где

$$\eta(x; \omega) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (\epsilon(x) - \epsilon_c). \quad (12)$$

Определение 6. $\gamma \in \mathbb{R}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (11) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (10) при $x > h$, граничным условиям (7) и условиям сопряжения (8).

2. Численный метод

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' + (\eta - \lambda^2) u = 0 \quad (13)$$

с начальными условиями

$$u(0) := 0, u'(0) := A. \quad (14)$$

Мы предполагаем, что решение задачи Коши (13), (14) существует, единственно, глобально определено на отрезке $[0, h]$ при заданных значениях

$0, h$ и непрерывно зависит от параметра λ . Из условия сопряжения на второй границе h (8) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda u(h) + u'(h) = 0. \quad (15)$$

Из формулы (15) ясно, что значение $\Delta(\lambda)$ выражается через значения решения задачи Коши.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда, взяв вещественную и мнимую части от выражения (15), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей комплексной частоты λ :

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\lambda) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Чтобы определить пару α, β , мы будем численно решать систему уравнений (16). Решением каждого уравнения в (16) является кривая в плоскости $O\alpha\beta$. Помещая обе кривые на одной плоскости, мы определим точки пересечения кривых; эти точки являются решением исходной задачи (рис. 1).

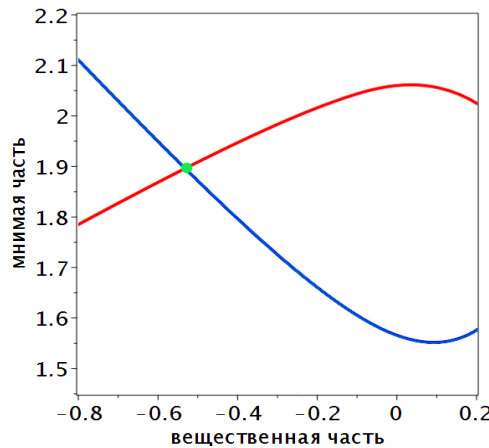


Рис. 1. Численное решение системы (16): синяя кривая – решение первого уравнения системы (16); красная кривая – решение второго уравнения системы (16); точка пересечения синей и красной кривых, обозначенная зеленым цветом, является решением системы (16)

Разбивая отрезки по α и β на более мелкие отрезки, мы определим сетку, состоящую из узлов $\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}$; эти узлы мы используем для метода пристрелки. Решая задачу Коши (13), (14) для каждого узла сетки, вычисляем величины $u(i, j)(h)$ и $u'(i, j)(h)$ для каждого узла. В силу непрерывной зависимости решения $u(h, \alpha, \beta)$ от параметров α и β существует точка $(\alpha^{(i)}, \hat{\beta}^{(j)})$ в плоскости $O\alpha\beta$ (где $\hat{\beta}^{(j)}$ лежит внутри интервала $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)})$), такая что $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$. Чем плотнее сетка, которую мы выбираем, тем более точное решение мы находим. Повторив эту процедуру для всей сетки, мы по-

лучим набор пар $\beta^{(p)}, \beta^{(q)}$, образующих кривую (синяя кривая рис. 1), приближенное решение уравнения $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$ в плоскости $O\alpha\beta$.

Применяя ту же процедуру к уравнению $\Delta_2(\alpha, \beta) = 0$, мы получаем еще одну кривую (красная кривая рис. 1) в плоскости $O\alpha\beta$, которая является приближенным решением указанного уравнения. Очевидно, точка пересечения (зеленая точка на рис. 1) расчетных кривых является приближенным решением задачи. Если сделать сетку более полной, то эти решения могут быть настолько точными, насколько это необходимо.

3. Численные результаты

На рис. 2–5 представлены результаты расчета постоянных распространения для задачи ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом соответственно. Расчеты произведены на разных частотах.

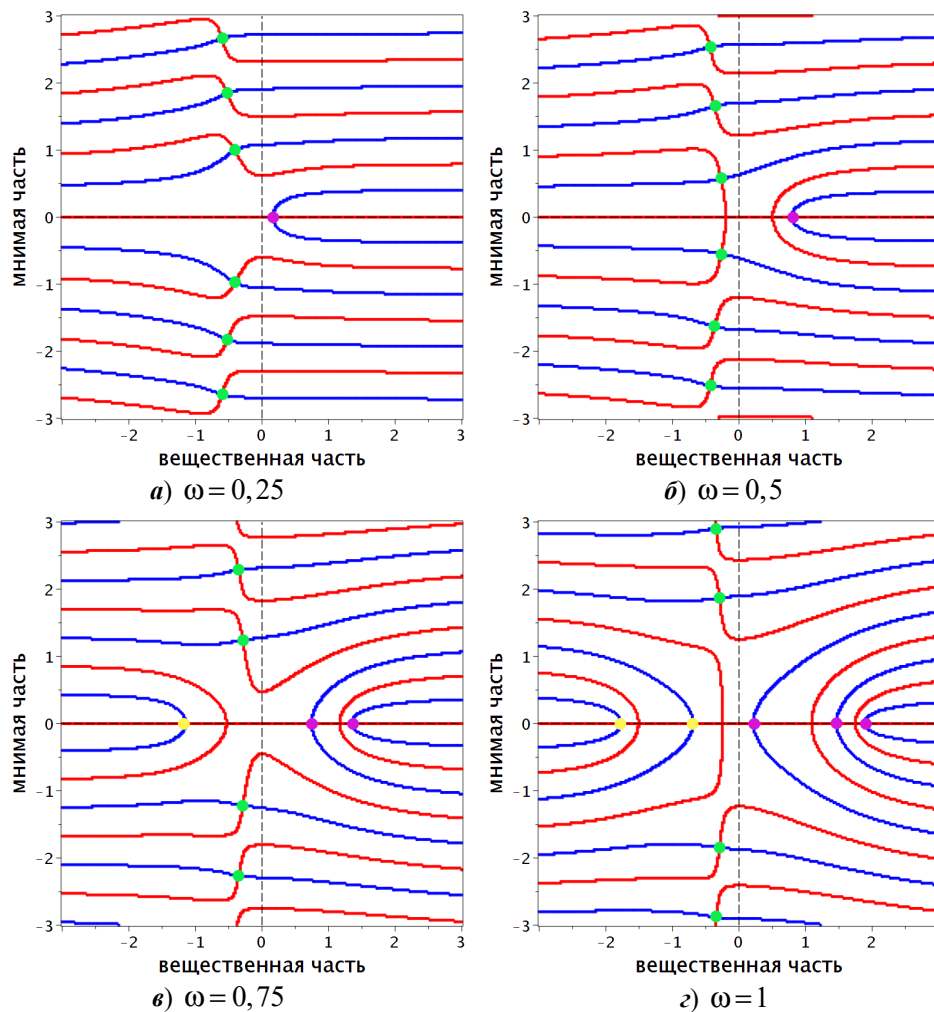


Рис. 2. Диэлектрический слой.

Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon = 5$, $\epsilon_c = 1$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4$

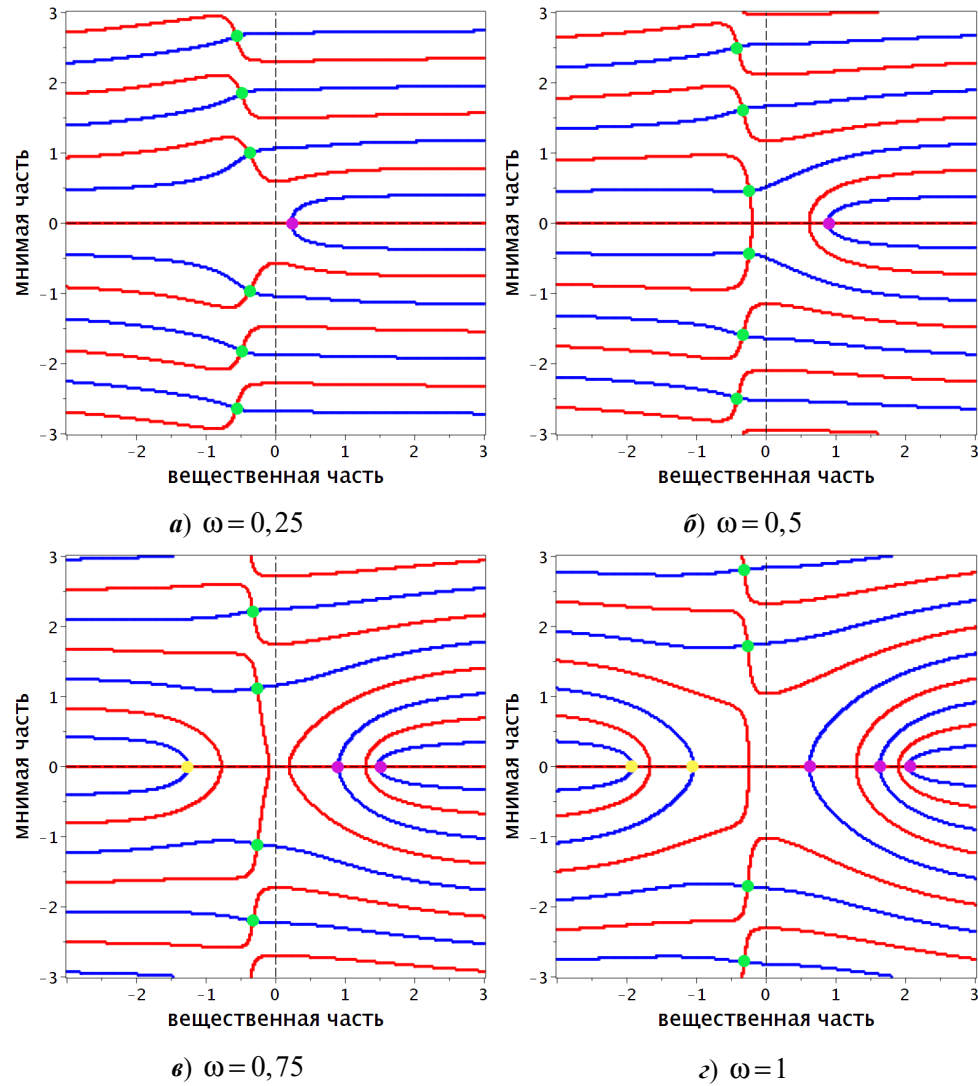


Рис. 3. Неоднородный диэлектрический слой.

Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon(x) = 5 + \frac{x}{h}$, $\epsilon_c = 1$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4 + \frac{x}{h}$

Приведено численное решение системы (16): синяя кривая – решение первого уравнения системы (16); красная кривая – решение второго уравнения системы (16); точка пересечения синей и красной кривых является решением системы (16); т.е. найдены комплексные (зеленые точки) и распространяющиеся (желтые точки) вытекающие волны, распространяющиеся поверхностные (фиолетовые точки) волны (рис. 2); комплексные (зеленые точки) и распространяющиеся (желтые точки) вытекающие волны, распространяющиеся поверхностные (фиолетовые точки) волны (рис. 3); комплексные (зеленые точки) вытекающие и комплексные поверхностные (розовые точки) волны (рис. 4); комплексные (зеленые точки) вытекающие волны (рис. 5).

Таким образом найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

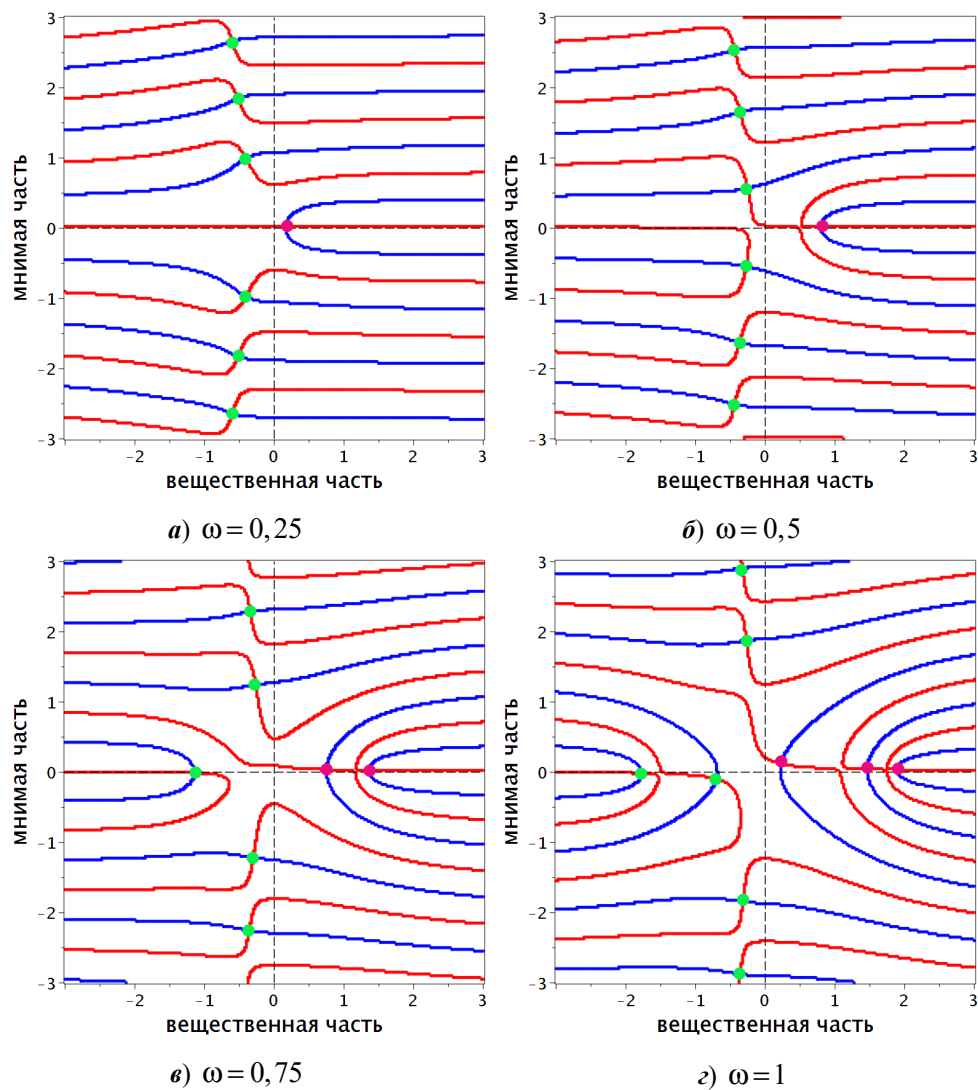


Рис. 4. Диэлектрический слой с поглощением.

Значения параметров: $h = 4$, $\varepsilon = 5 + 0,1\omega i$, $\varepsilon_c = 1$, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4 + 0,1\omega i$

Заключение

В статье предложен и реализован численный метод для решения задачи определения постоянных распространения (и затухания) для ТЕ-поляризованных волн в открытом слое, заполненном неоднородным материалом.

Рассмотрены случаи заполнения слоя однородным диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом.

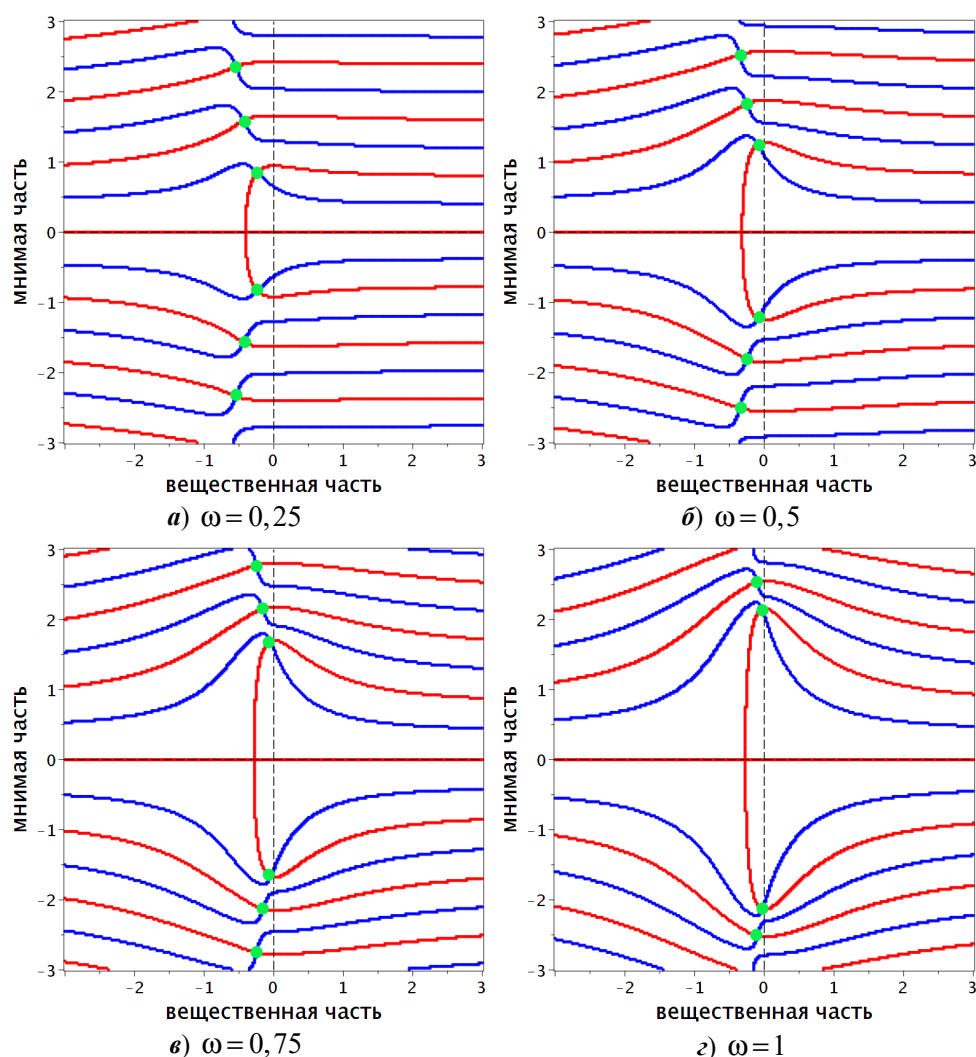


Рис. 5. Метаматериальный слой.
Значения параметров: $h = 4$, $\varepsilon = -3$, $\varepsilon_c = 1$, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = -4$

Список литературы

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984. 512 с.
2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М. : Радио и связь, 1987.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1987. 655 с.
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М. : Мир, 1974. 576 с.
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. P. 1396–1403.
6. Smirnov Y. G., Smolkin E. Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 101. P. 53–56.
7. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures // Mathematical Modelling and Analysis. 2017. Vol. 22. P. 271–282.
8. Smolkin E., Valovik D. Nonlinear propagation of coupled electromagnetic waves in a circular cylindrical waveguide // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. P. 1294–1309.

References

1. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov* = *Introduction to the theory of optical waveguides*. Moscow: Mir, 1984:512. (In Russ.)
2. Snayder A., Lav Dzh. *Teoriya opticheskikh volnovodov* = *Optical waveguide theory*. Moscow: Radio i svyaz', 1987. (In Russ.)
3. Vaynshteyn L.A. *Elektromagnitnye volny* = *Electromagnetic waves*. Moscow: Radio i svyaz', 1987:655. (In Russ.)
4. Markuze D. *Opticheskie volnovody* = *Optical waveguides*. Moscow: Mir, 1974:576. (In Russ.)
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41:1396–1403.
6. Smirnov Y.G., Smolkin E.Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer. *Doklady Mathematics*. 2020;101:53–56.
7. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017;22:271–282.
8. Smolkin E., Valovik D. Nonlinear propagation of coupled electromagnetic waves in a circular cylindrical waveguide. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57:1294–1309.

Информация об авторах / Information about the authors

Евгений Юрьевич Смолькин

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Evgeniy Yu. Smol'kin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics and
supercomputer modeling, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Максим Олегович Снегур

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Maksim O. Snegur

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Поступила в редакцию / Received 08.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020

УДК 517.9

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

Об изучении спектра семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака

С. И. Митрохин

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
mitrokhin-sergey@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В работе предлагается новый метод исследования дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Изучается последовательность дифференциальных операторов высокого четного порядка, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака. Предполагается, что потенциал оператора является кусочно-суммируемой функцией на отрезке задания оператора. В точках разрыва потенциала требуется выполнение условий «склейки» для корректного определения решений соответствующих дифференциальных уравнений. Исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов, заданных на конечном отрезке, с одним из видов разделенных граничных условий. При больших значениях спектрального параметра методом Наймарка получена асимптотика фундаментальной системы решений соответствующих дифференциальных уравнений. С помощью этой асимптотики изучены условия «склейки» рассматриваемого дифференциального оператора. Затем изучены граничные условия исследуемого оператора. В результате выведено уравнение на собственные значения изучаемого оператора, которое представляет собой целую функцию. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, которая является правильным шестнадцатиугольником. В различных секторах индикаторной диаграммы методом последовательных приближений Пикара найдена асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов. В предельном случае найденная асимптотика собственных значений стремится к асимптотике собственных значений оператора, потенциалом которого является дельта-функция Дирака. *Материалы и методы.* Асимптотика фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений с суммируемыми потенциалами при больших значениях спектрального параметра получена обобщенным методом Наймарка. Для нахождения корней уравнения на собственные значения изучаемого оператора методом Беллмана – Кука исследована индикаторная диаграмма, которая является правильным шестнадцатиугольником. Асимптотика собственных значений изучаемых дифференциальных операторов в различных секторах индикаторной диаграммы найдена методом последовательных приближений Пикара. *Результаты.* Изучен спектр ранее не изучаемого семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака. С учетом условия «склейки» в точках разрыва потенциалов доказано, что уравнение на собственные значения представляет собой квазиполином, корни которого можно найти методом Беллмана – Кука. Аналогичные результаты можно получить и для других видов разделенных граничных условий. *Выводы.* Полученные новые результаты об асимптотике спектра семейства дифференциальных операторов могут быть применены к исследованию базисности собственных функций аналогичных операторов, изучению функции Грина и вычислению формул регуляризованных следов операторов, последовательность потенциалов которых сходятся к дельта-функции Дирака. Метод дельта-потенциалов применяется

в физике для исследования короткодействующих примесей, дефектов в различных системах. В атомной и ядерной физике огромную популярность имеет модель точечных потенциалов, это подтверждает необходимость изучения операторов с дельта-потенциалами.

Ключевые слова: дифференциальный оператор с разрывными коэффициентами, асимптотика решений дифференциального уравнения, кусочно-суммируемый потенциал, дельта-функция Дирака, асимптотика собственных значений, спектр оператора

Для цитирования: Митрохин С. И. Об изучении спектра семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 20–38. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

On the studying the spectrum of differential operators' family whose potentials converge to the Dirac delta function

S.I. Mitrokhin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

mitrokhin-sergey@yandex.ru

Abstract. *Background.* The paper proposes a new method for studying differential operators with discontinuous coefficients. We study a sequence of differential operators of high even order whose potentials converge to the Dirac delta function. It is assumed that the operator's potential is a piecewise-summable function on the segment of the operator task. At the points of discontinuity of the potential, the fulfillment of the "gluing" conditions is required to correctly determine the solutions of the corresponding differential equations. The spectral properties of differential operators defined on a finite segment with one of the types of separated boundary conditions are investigated. For large values of the spectral parameter, the Naimark method is used to obtain the asymptotics of the fundamental system of solutions of the corresponding differential equations. With the help of this asymptotics, the conditions for "gluing" the considered differential operator are studied. Then the boundary conditions of the operator under study are studied. As a result, we derive an eigenvalue equation for the operator under study, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation, which is a regular hexadecagon, is investigated. In various sectors of the indicator diagram, the method of successive Picard approximations has been used to find the eigenvalue asymptotics of the studied differential operators. In the limiting case, the found asymptotics of the eigenvalues tends to the asymptotics of the eigenvalues of an operator whose potential is the Dirac delta function. *Materials and methods.* The asymptotics of the solutions' fundamental system of differential equations with summable potentials for large values of the spectral parameter is obtained by the generalized Naimark method. To find the roots of the equation for the eigenvalues of the operator under study, the Bellman-cook method is used to study the indicator diagram, which is a regular hexadecagon. The asymptotics of the eigenvalues of the studied differential operators in various sectors of the indicator diagram are found by the method of successive Picard approximations. *Results.* The spectrum of a previously unexplored family of differential operators of high even order whose potentials converge to the Dirac Delta function is studied. Taking into account the "gluing" condition at the points of discontinuity of the potentials, it is proved that the eigenvalue equation is a quasi-polynomial, the roots of which can be found by the Bellman-Cook method. Similar results can be obtained for other types of separated boundary conditions. *Conclusions.* The new results obtained on the asymptotics of the spectrum of a family of differential operators can be applied to the study of the basis property of the eigenfunctions of similar operators, the study of the Green's function,

and the calculation of formulas for regularized traces of operators whose sequence of potentials converges to the Dirac delta function. The delta potential method is used in physics to study short-range impurities and defects in various systems. In atomic and nuclear physics, the model of point potentials is very popular; this confirms the need to study operators with delta potentials.

Keywords: differential operator with discontinuous coefficients, asymptotics of differential equation solutions, piecewise-summable potential, Dirac delta function, asymptotics of eigenvalues, spectrum of the operator

For citation: Mitrokhin S.I. On the studying the spectrum of differential operators' family whose potentials converge to the Dirac delta function. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:20–38. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-3

Введение

Изучим свойства спектра семейства дифференциальных операторов, задаваемых дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(16)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^{16}y_1(x), \quad 0 \leq x < x_{1n}, \quad a > 0; \quad (1)$$

$$y_2^{(16)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda a^{16}y_2(x), \quad x_{1n} \leq x \leq x_{2n}, \quad x_{1n} \leq x_0 \leq x_{2n}, \quad (2)$$

$$y_3^{(16)}(x) + q_3(x)y_3(x) = \lambda a^{16}y_3(x), \quad x_{2n} < x \leq \pi, \quad (3)$$

при этом на потенциал $Q(x) = (q_1(x); q_2(x); q_3(x))^*$ накладываются следующие условия:

$$q_1(x) = 0, x \in [0; x_{1n}); q_3(x) = 0, x \in (x_{2n}; \pi];$$

$$q_2(x) \in L_1[x_{1n}; x_{2n}] \Leftrightarrow \left(\int_{x_{1n}}^x q_2(t) dt \right)' x = q_2(x) \text{ п.п. на } [x_{1n}; x_{2n}];$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{1n}+0} q_2(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} q_2(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} q_2(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{2n}-0} q_2(x) = 0; \quad \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt = 1; \quad (4)$$

в точках разрыва коэффициентов требуются следующие условия «склейки»:

$$y_1(x_{1n}-0) = y_2(x_{1n}+0); y_1^{(m)}(x_{1n}-0) = y_2^{(m)}(x_{1n}+0), m = 1, 2, \dots, 15; \quad (5)$$

$$y_2(x_{2n}-0) = y_3(x_{2n}+0); y_2^{(m)}(x_{2n}-0) = y_3^{(m)}(x_{2n}+0), m = 1, 2, \dots, 15; \quad (6)$$

с граничными условиями вида

$$y_1^{(m_1)}(0) = y_1^{(m_2)}(0) = \dots = y_1^{(m_{13})}(0) = y_3^{(n_1)}(\pi) = y_3^{(n_2)}(\pi) = y_3^{(n_3)}(\pi) = 0. \quad (7)$$

Условия (4) обеспечивают нам предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_2(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_{2,n}(x) = \delta(x - x_0),$$

поэтому предел спектра оператора (1)–(7) при $n \rightarrow +\infty$ будет совпадать со спектром дифференциального оператора

$$\overline{y^{(16)}}(x) + \delta(x - x_0) \bar{y}(x) = \lambda a^{16} \bar{y}(x),$$

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < x_0 < \pi, \quad \bar{y}(x) = (y_1(x); y_2(x); y_3(x))^*,$$

с граничными условиями (7).

Развитие спектральной теории идет в сторону уменьшения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих дифференциальные операторы. Дифференциальные операторы второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами, в том числе с кусочно-гладкой весовой функцией, изучались в работах [1–5]. Необходимость требования выполнения условий «склейки» или условий «сопряжения» в точках разрыва коэффициентов объяснена в монографии [6, гл. 3].

Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными коэффициентами изучены в работе [7]. В статье [8] вычислена асимптотика собственных значений и асимптотика собственных функций оператора Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. В работах [9–13] автором предложен другой метод для обобщения результатов работы [8] на различные типы операторов порядка выше второго с суммируемыми коэффициентами.

В статьях [14–16] вычислен регуляризованный след первого порядка для оператора второго порядка с дельта-потенциалом. Необходимость изучения операторов, потенциалами которых являются дельта-функции, следует из физики: этому посвящены работы [17, 18]. Наша цель: получить аналогичные результаты для операторов порядка выше второго с дельта-потенциалами, приближая такие потенциалы последовательностью кусочно-суммируемых потенциалов. Собственные значения таких операторов будут расположены бесконечно близко. Необходимая теоретическая база исследования таких операторов с кусочно-разрывными коэффициентами или кусочно-разрывной весовой функцией подготовлена работами [19, 20].

1. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1)–(3) при $\lambda \rightarrow \infty$

Пусть $\lambda = s^{16}$, $s = \sqrt[16]{\pi}$, при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[16]{1} = +1$. Обозначим через w_k ($k = 1, 2, \dots, 16$) различные корни шестнадцатой степени из единицы:

$$w_k^{16} = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{16}(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, 16;$$

$$w_1 = 1; w_2 = e^{\frac{2\pi i}{16}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = z \neq 0;$$

$$w_3 = e^{\frac{4\pi i}{16}} = z^2; \dots; w_m = z^{m-1}, \quad m=1, 2, \dots, 16. \quad (8)$$

Точки w_k ($k=1, 2, \dots, 16$) из (8) делят единичную окружность на шестнадцать равных частей и для них справедливы свойства:

$$\sum_{k=0}^{16} w_k^m = 0, \quad m=1, 2, \dots, 15; \\ \sum_{k=0}^{16} w_k^m = 16, \quad m=0, m=16. \quad (9)$$

Методом статей [9, 20] и монографии [21, гл. 2] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Общие решения дифференциальных уравнений (1)–(3) представляются в следующем виде:

$$y_1(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}(x; s); \quad y_1^{(m)}(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x; s), \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad (10)$$

$$y_{1k}(x; s) = e^{aw_k sx}; \quad y_{1k}^{(m)}(x; s) = (aw_k s)^m e^{aw_k sx}, \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad k=1, 2, \dots, 16; \quad (11)$$

$$y_2(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x; s); \quad y_2^{(m)}(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x; s), \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad (12)$$

$$y_{2k}(x; s) = e^{aw_k sx} - \frac{1}{16a^{15}s^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n e^{aw_n sx} \times \\ \times \int_{x_{1n}}^x q_2(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn} + O\left(\frac{1}{s^{30}}\right); \quad k=1, 2, \dots, 16; \quad (13)$$

$$y_2^{(m)}(x; s) = (aw_k s)^m e^{aw_k sx} - \frac{1}{16a^{15}s^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n (aw_n s)^m e^{aw_n sx} \times \\ \times \int_{x_{1n}}^x q_2(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn} + O\left(\frac{1}{s^{30-m}}\right); \quad k=1, 2, \dots, 16; \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad (14)$$

$$y_3(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}(x; s); \quad y_3^{(m)}(x; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}^{(m)}(x; s); \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad (15)$$

$$y_{3k}(x; s) = e^{aw_k sx}; \quad y_3^{(m)}(x; s) = (aw_k s)^m e^{aw_k sx}; \quad k=1, 2, \dots, 16; \quad m=1, 2, \dots, 15; \quad (16)$$

Величины $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} (k=1,2,...,16)$ в формулах (10), (12), (15) – произвольные постоянные, при этом справедливы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} y_{1k}(0;s) &= 1; \quad y_{1k}^{(m)}(0;s) = (aw_k s)^m; \quad y_{2k}(x_{1n};s) = e^{aw_k s x_{1n}}; \\ y_{2k}^{(m)}(x_{1n};s) &= (aw_k s)^m e^{aw_k s x_{1n}}; \quad y_{3k}(x_{2n};s) = e^{aw_k s x_{2n}}; \\ y_{3k}^{(m)}(x_{2n};s) &= (aw_k s)^m e^{aw_k s x_{2n}}; \quad k=1,2,...,16; \quad m=1,2,...,15. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Изучение условий «склейки» (5)

Из условий склейки (5) с помощью формул (10) и (12) получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} & y_2(x_{1n}+0;s) \stackrel{(5)}{=} y_1(x_{1n}-0;s) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x_{1n}+0;s) = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}(x_{1n}-0;s); \\ & \frac{y_2^{(m)}(x_{1n}+0;s)}{(as)^m} \stackrel{(5)}{=} \frac{y_1^{(m)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n}+0;s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^m}, \quad m=1,2,...,15. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Система (18)–(19) имеет единственное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(x;s) \neq 0}; C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(x;s)}; \dots; C_{2,16} = \frac{\Delta_{2,16}}{\Delta_{02}(x;s)}, \quad (20)$$

$$\Delta_{02}(x;s) = \begin{vmatrix} y_{21}(x;s) & y_{22}(x;s) & \dots & y_{2,16}(x;s) \\ \frac{y'_{21}(x;s)}{as} & \frac{y'_{22}(x;s)}{as} & \dots & \frac{y'_{2,16}(x;s)}{as} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & \frac{y_{22}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} & \dots & \frac{y_{2,16}^{(15)}(x;s)}{(as)^{15}} \end{vmatrix}, \quad (21)$$

определители Δ_{2k} из (20) получаются из определителя $\Delta_{02}(x_{1n};s)$ из (21) заменой k -го столбца на столбец:

$$\left(\sum_{k=1}^{16} C_{1k} y_{1k}(x_{1n}-0;s); \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_{1n}-0;s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(15)}(x_{1n}-0;s)}{(as)^{15}} \right)^*. \quad (22)$$

Определитель $\Delta_{02}(x; s)$ из (21) является определителем Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x; s)\}_{k=1}^{16}$ линейного дифференциального уравнения (2), поэтому он не равен нулю и не зависит от x . В силу формул (13)–(14) и (9), (17) получаем:

$$\begin{aligned}\Delta_{02}(x; s) &= \Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(x_{1n}; s) = \\ &= \det Wr[y_{21}(x; s); y_{22}(x; s); \dots; y_{2,16}(x; s)] = \Delta_{00} \neq 0,\end{aligned}\quad (23)$$

где Δ_{00} – определитель Вандермонда чисел w_k ($k = 1, 2, \dots, 16$):

$$\begin{aligned}\Delta_{00} &= \det Wandermonds(w_1, w_2, \dots, w_{16}) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_{15} & w_{16} \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{15}^2 & w_{16}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{15} & w_2^{15} & w_3^{15} & \dots & w_{15}^{15} & w_{16}^{15} \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{\substack{k > m; \\ k, m = 1, 2, \dots, 16}} (w_k - w_m) = \Delta_{00} \neq 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Используя свойства определителей, подставим формулы (22), (11) в (20)–(21), выведем следующие формулы:

$$\Delta_{21} = \Delta_{00} C_{11}; \Delta_{22} = \Delta_{00} C_{12}; \dots; \Delta_{2,16} = \Delta_{00} C_{1,16}.\quad (25)$$

3. Изучение условий «склейки» (6)

Подставляя формулы (15) и (12) в условия «склейки» (6), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} &y_3(x_{2n} + 0; s) \stackrel{(6)}{=} y_2(x_{2n} - 0; s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} y_{3k}(x_{2n} + 0; s) = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x_{2n} - 0; s); \\ &\frac{y_3^{(m)}(x_{1n} + 0; s)}{(as)^m} \stackrel{(6)}{=} \frac{y_2^{(m)}(x_{2n} - 0; s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} \frac{y_{3k}^{(m)}(x_{2n} + 0; s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n} - 0; s)}{(as)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 15. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Система (26)–(27) также имеет единственное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$C_{31} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{03}(x;s) \neq 0}; C_{32} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{03}(x;s)}; \dots; C_{3,16} = \frac{\Delta_{3,16}}{\Delta_{03}(x;s)}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{03}(x;s) &= \begin{vmatrix} y_{31}(x;s) & y_{32}(x;s) & \dots & y_{3,16}(x;s) \\ y'_{31}(x;s) & y'_{32}(x;s) & \dots & y'_{3,16}(x;s) \\ as & as & \dots & as \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{31}^{(15)}(x;s) & y_{32}^{(15)}(x;s) & \dots & y_{3,16}^{(15)}(x;s) \\ (as)^{15} & (as)^{15} & \dots & (as)^{15} \end{vmatrix} \stackrel{(16)}{=} \\ &= \begin{vmatrix} e^{aw_1sx} & e^{aw_2sx} & \dots & e^{aw_{16}sx} \\ w_1 e^{aw_1sx} & w_2 e^{aw_2sx} & \dots & w_{16} e^{aw_{16}sx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{15} e^{aw_1sx} & w_2^{15} e^{aw_2sx} & \dots & w_{16}^{15} e^{aw_{16}sx} \end{vmatrix} = \\ &= e^{a(w_1+w_2+\dots+w_{16})sx} \Delta_{00} = e^0 \Delta_{00} = \Delta_{00} \neq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

определители Δ_{3k} ($k=1,2,\dots,16$) из формулы (28) получаются из определителя $\Delta_{03}(x_{2n};s)$ из (29) заменой k -го столбца на столбец:

$$\left(\sum_{k=1}^{16} C_{2k} y_{2k}(x_{2n}-0;s); \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \frac{y'_{2k}(x_{2n}-0;s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(15)}(x_{2n}-0;s)}{(as)^{15}} \right)^*, \quad (30)$$

где $k=1,2,\dots,16$.

Используя свойства определителей, подставим формулы (30) в (28)–(29), находим:

$$\Delta_{3p} = \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \Delta_{3pk}, \quad p=1,2,\dots,16, \quad (31)$$

определители Δ_{3pk} из формулы (31) получаются из определителя $\Delta_{03}(x_{2n};s)$ из (29) заменой p -го столбца ($p=1,2,\dots,16$) на столбец получаем:

$$\left(y_{2k}(x_{2n}-0;s); \frac{y'_{2k}(x_{2n}-0;s)}{as}; \dots; \frac{y_{2k}^{(15)}(x_{2n}-0;s)}{(as)^{15}} \right)^*, \quad (32)$$

$p=1,2,\dots,16$.

Применяя формулы (13), (14), из (31), (32) получаем:

$$\Delta_{31k} = \begin{vmatrix} g_k - \frac{1}{v^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n g_n \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & g_2 & \dots & g_{16} \\ w_k g_k - \frac{1}{v^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n w_n g_n \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & w_2 g_2 & \dots & w_{16} g_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^{15} g_k - \frac{1}{v^{15}} \sum_{n=1}^{16} w_n w_n^{15} g_n \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) & w_2^{15} g_2 & \dots & w_{16}^{15} g_{16} \end{vmatrix}; \quad (33)$$

$g_k = e^{aw_k s x_{2n}}, k=1,2,\dots,16; v^{15} = 16a^{15} s^{15}$, интегралы $\left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn}$ определены

формулами (13)–(14).

Раскладывая определители Δ_{31k} из (33) по столбцам на сумму определителей, получаем:

$$\Delta_{31k} = \Delta_{31k,0} - \frac{1}{16a^{15} s^{15}} \Delta_{31k,15} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right), \quad (34)$$

$$\Delta_{31k} = \begin{vmatrix} g_k & g_2 & \dots & g_{16} \\ w_k g_k & w_2 g_2 & \dots & w_{16} g_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^{15} g_k & w_2^{15} g_2 & \dots & w_{16}^{15} g_{16} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, k=2,3,\dots,16; \\ \Delta_{00}, k=1; \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{31k,15} &= \sum_{n=1}^{2N} w_n \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{15} & w_2^{15} & \dots & w_{16}^{15} \end{vmatrix} g_n g_2 g_3 (\dots) g_{16} = \\ &= \begin{cases} w_1 \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akn} \cdot \Delta_{00} e^0, n=1; k=1,2,\dots,16; \\ 0, n=2,3,\dots,16. \end{cases} \quad (36) \end{aligned}$$

Вычисляя определители $\Delta_{3m} (m=2,3,\dots,16)$ из (28), (31) аналогично определителям Δ_{31k} из (33)–(36), выводим следующие формулы:

$$\Delta_{3pk} = \Delta_{3pk,0} - \frac{1}{16a^{15} s^{15}} \Delta_{3pk,15} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right); \quad p, k=1,2,\dots,16, \quad (37)$$

$$\Delta_{3pk} = \begin{cases} 0, & p \neq k; \quad p, k = 1, 2, \dots, 16; \\ \Delta_{00}, & k = p; \end{cases} \quad (38)$$

$$\Delta_{3pk,15} = \Delta_{00} w_p \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akp}; \quad k, p = 1, 2, \dots, 16. \quad (39)$$

Таким образом, из формул (34)–(39) находим:

$$\Delta_{3kk} = \Delta_{00} \left[1 - \frac{w_k}{16a^{15}s^{15}} \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akk} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 16; \quad (40)$$

$$\Delta_{3pk} = \Delta_{00} \left[1 - \frac{w_p}{16a^{15}s^{15}} \left(\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} \dots \right)_{akp} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) \right], \quad k \neq p; \quad k, p = 1, 2, \dots, 16. \quad (41)$$

Формулы (20), (25), (31), (40), (41) позволяют изучить граничные условия (8).

4. Изучение граничных условий (8)

Подставляя формулы (10)–(11) в первые 13 граничных условий (8), получаем:

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0;s)^{(8)}}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m_p)}(0;s)}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} w_k^{m_p} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 13. \quad (42)$$

Из последних трех граничных условий (8) с помощью формул (15)–(16), (28), (31) и (20) находим:

$$\begin{aligned} \frac{y_3^{(n_r)}(\pi;s)^{(8)}}{(as)^{n_r}} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} \frac{y_{1k}^{(n_r)}(\pi;s)}{(as)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{3k} w_k^{n_r} e^{aw_k s \pi} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{03}(s) \neq 0} w_k^{n_r} e^{aw_k s \pi} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \left(\sum_{n=1}^{16} C_{2n} \Delta_{3kn} \right) w_k^{n_r} e^{aw_k s \pi} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{2k} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} \frac{\Delta_{00} C_{1k}}{\Delta_{02}(s)} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{16} C_{1k} \varphi_{2k,r}(\pi;s) = 0, \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\varphi_{2k,r}(\pi; s) = \sum_{n=1}^{16} \Delta_{3nk} w_k^{n_r} e^{aw_n s \pi}, \quad r = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Уравнения (42)–(44) образуют систему из шестнадцати линейных однородных уравнений с 16 неизвестными $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1,16}$. Ненулевые решения такая система имеет только в том случае, если ее определитель равен нулю, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(7) имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_{15}^{m_1} & w_{16}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_{15}^{m_2} & w_{16}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & \dots & w_{15}^{m_{13}} & w_{16}^{m_{13}} \\ \varphi_{21,1}(\pi; s) & \varphi_{22,1}(\pi; s) & \dots & \varphi_{2,15,1}(\pi; s) & \varphi_{2,16,1}(\pi; s) \\ \varphi_{21,2}(\pi; s) & \varphi_{22,2}(\pi; s) & \dots & \varphi_{2,15,2}(\pi; s) & \varphi_{2,16,2}(\pi; s) \\ \varphi_{21,3}(\pi; s) & \varphi_{22,3}(\pi; s) & \dots & \varphi_{2,15,3}(\pi; s) & \varphi_{2,16,3}(\pi; s) \end{vmatrix} = 0, \quad (45)$$

функции $\varphi_{2k,r}(\pi; s) (k = 1, 2, \dots, 16; r = 1, 2, 3)$ определены формулами (44), (40), (41).

Применяя формулу Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (45) по последним трем строчкам, получим:

$$\begin{aligned} f(s) = & \begin{vmatrix} \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \varphi_{23,1} \\ \varphi_{21,2} & \varphi_{22,2} & \varphi_{23,2} \\ \varphi_{21,3} & \varphi_{22,3} & \varphi_{23,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} - \\ & - \begin{vmatrix} \varphi_{22,1} & \varphi_{23,1} & \varphi_{24,1} \\ \varphi_{22,2} & \varphi_{23,2} & \varphi_{24,2} \\ \varphi_{22,3} & \varphi_{23,3} & \varphi_{24,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \varphi_{23,1} & \varphi_{24,1} & \varphi_{25,1} \\ \varphi_{23,2} & \varphi_{24,2} & \varphi_{25,2} \\ \varphi_{23,3} & \varphi_{24,3} & \varphi_{25,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_6^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & w_6^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} - \dots = 0. \quad (46) \end{aligned}$$

Для нахождения корней уравнения (46) необходимо изучить так называемую индикаторную диаграмму этого уравнения (см. [22, гл. 12]). Из формул (44), (40), (41) следует, что индикаторная диаграмма уравнения (46) – это выпуклая оболочка множества точек $\{w_k + w_m + w_p, k \neq m, k \neq p; k, m, p = 1, 2, \dots, 16\}$,

которая является правильным шестнадцатигульником $D_1 D_2 D_3 \dots D_{15} D_{16}$, вершинами которого являются точки $D_1(w_1 + w_2 + w_3)$, $D_2(w_2 + w_3 + w_4)$, $D_3(w_3 + w_4 + w_5), \dots$, $D_{14}(w_{14} + w_{15} + w_{16})$, $D_{15}(w_{15} + w_{16} + w_1)$, $D_{16}(w_{16} + w_1 + w_2)$; точки $E_{kpm}(w_k + w_p + w_m)$ при условии $|k - p| \geq 2$, $|p - m| \geq 2$ или $|k - m| \geq 2$ попадают внутрь этого правильного шестнадцатигульника, при нахождении корней уравнения (46) их можно отбросить, так как они представляют собой бесконечно малые величины. Корни уравнения (46) находятся в 16 секторах бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам шестнадцатигульника $D_1 D_2 D_3 \dots D_{15} D_{16}$.

Из книги [22, гл. 12] следует, что для нахождения корней уравнения (46) в секторе, перпендикулярном стороне $D_1 D_2$, в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями $w_1 + w_2 + w_3$ и $w_2 + w_3 + w_4$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(7) в секторе, перпендикулярном стороне $D_1 D_2$ индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:

$$h_1(s) = \begin{vmatrix} \Phi_{21,1}(\pi; s) & \Phi_{22,1}(\pi; s) & \Phi_{23,1}(\pi; s) \\ \Phi_{21,2}(\pi; s) & \Phi_{22,2}(\pi; s) & \Phi_{23,2}(\pi; s) \\ \Phi_{21,3}(\pi; s) & \Phi_{22,3}(\pi; s) & \Phi_{23,3}(\pi; s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} \Phi_{22,1}(\pi; s) & \Phi_{23,1}(\pi; s) & \Phi_{24,1}(\pi; s) \\ \Phi_{22,2}(\pi; s) & \Phi_{23,2}(\pi; s) & \Phi_{24,2}(\pi; s) \\ \Phi_{22,3}(\pi; s) & \Phi_{23,3}(\pi; s) & \Phi_{24,3}(\pi; s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Применяя формулы (8), получаем:

$$\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_{13}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_2^{m_{13}} & \dots & w_{13}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{12m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_{13}} & z^{m_{13}} & \dots & z^{12m_{13}} \end{vmatrix} = \\ = \det \text{Wandermond} \cdot s(z^{m_1}; z^{m_2}; \dots; z^{m_{13}}) = \prod_{\substack{k > p \\ k, p = 1, 2, \dots, 13}} (z^{m_k} - z^{m_p}) = R_{13} \neq 0; \quad (48)$$

$$\begin{vmatrix} w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_4^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z^{3m_1} & z^{4m_1} & \dots & z^{15m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{3m_{13}} & z^{4m_{13}} & \dots & z^{15m_{13}} \end{vmatrix} \stackrel{(48)}{=} z^{3M_{13}} R_{13}, M_{13} = \sum_{k=1}^{13} m_k;$$

$$\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_5^{m_1} & \dots & w_{16}^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_{13}} & w_5^{m_{13}} & \dots & w_{16}^{m_{13}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_5^{m_1} & \dots & w_2^{m_1} & w_1^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_5^{m_{13}} & \dots & w_2^{m_{13}} & w_1^{m_{13}} \end{vmatrix} \stackrel{(48)}{=} z^{4M_{13}} R_{13}, \dots \quad (49)$$

Подставим формулы (48)–(49) в уравнение (47), поделим на $z^{3M_{13}} R_{13} \neq 0$, учтем свойства определителей, приведем его в следующему виду:

$$h_1(s) = \begin{vmatrix} \varphi_{21,1}(\pi; s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,1}(\pi; s) & \varphi_{22,1}(\pi; s) & \varphi_{23,1}(\pi; s) \\ \varphi_{21,2}(\pi; s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,2}(\pi; s) & \varphi_{22,2}(\pi; s) & \varphi_{23,2}(\pi; s) \\ \varphi_{21,3}(\pi; s) - z^{M_{13}} \varphi_{24,2}(\pi; s) & \varphi_{22,3}(\pi; s) & \varphi_{23,3}(\pi; s) \end{vmatrix} = 0. \quad (50)$$

Применяя формулы (44), (40), (41) и оставляя только необходимые для сектора, перпендикулярного стороне $D_1 D_2$, экспоненты $e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi}$ и $e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi}$, произведем вычисления с точностью до $\underline{O}\left(\frac{1}{s^{15}}\right)$ и приведем уравнение (50) к следующему виду:

$$\begin{aligned} h_1(s) = & \left[T_{123} \Delta_{311} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi} - \right. \\ & \left. - z^{M_{13}} T_{423} \Delta_{344} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_4+w_2+w_3)s\pi} \right] + \\ & + \left\{ T_{423} \Delta_{341} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_2+w_3+w_4)s\pi} - \right. \\ & \left. - z^{M_{13}} T_{123} \Delta_{314} \Delta_{322} \Delta_{333} e^{a(w_1+w_2+w_3)s\pi} + \bar{o}(1) \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0; \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{123} = & \begin{vmatrix} w_1^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_1^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_1^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix} \stackrel{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1^{n_1} & z^{n_1} & z^{2n_1} \\ 1^{n_2} & z^{n_2} & z^{2n_2} \\ 1^{n_3} & z^{n_3} & z^{2n_3} \end{vmatrix} = \\ = & (z^{n_3} - z^{n_2})(z^{n_3} - z^{n_1})(z^{n_2} - z^{n_1}) = T_{123} \neq 0; \quad (52) \end{aligned}$$

$$T_{423} = \begin{vmatrix} w_4^{n_1} & w_2^{n_1} & w_3^{n_1} \\ w_4^{n_2} & w_2^{n_2} & w_3^{n_2} \\ w_4^{n_3} & w_2^{n_3} & w_3^{n_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_2^{n_1} & w_3^{n_1} & w_4^{n_1} \\ w_2^{n_2} & w_3^{n_2} & w_4^{n_2} \\ w_2^{n_3} & w_3^{n_3} & w_4^{n_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z^{n_1} & z^{2n_1} & z^{3n_1} \\ z^{n_2} & z^{2n_2} & z^{3n_2} \\ z^{n_3} & z^{2n_3} & z^{3n_3} \end{vmatrix} = z^{N_3} T_{123}, N_3 = \sum_{k=1}^3 n_k. \quad (53)$$

Подставляя формулы (52)–(53) в уравнение (51), поделим на $T_{123}e^{a(w_4+w_2+w_3)s\pi} \neq 0$, получим:

$$h_1(s) = \left[\Delta_{311}\Delta_{322}\Delta_{333}e^{a(w_1-w_4)s\pi} - z^{M_{13}}z^{N_3}\Delta_{344}\Delta_{322}\Delta_{333} \right] + \\ + \left[z^{N_3}\Delta_{341}\Delta_{322}\Delta_{333} - z^{M_{13}}\Delta_{314}\Delta_{322}\Delta_{333}e^{a(w_1-w_4)s\pi} \right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0. \quad (54)$$

Используя формулы (40)–(41), приведем уравнение (54) к следующему виду:

$$h_1(s) = \left[e^{a(w_1-w_4)s\pi} \left(1 - \frac{w_1+w_2+w_3}{16a^{15}s^{15}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a11} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) \right) - \right. \\ \left. - z^{M_{13}}z^{N_3} \left(1 - \frac{w_2+w_3+w_4}{16a^{15}s^{15}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a22} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) \right) \right] - \\ - \frac{1}{16a^{15}s^{15}} \left[w_4z^{N_3} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{a(w_1-w_4)s\pi} dt_{a14} - w_4z^{M_{13}}e^{a(w_1-w_4)s\pi} \times \right. \\ \left. \times \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{a(w_4-w_1)s\pi} dt_{a41} \right] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{30}}\right) = 0. \quad (55)$$

Основное приближение уравнения (55) имеет вид

$$e^{a(w_1-w_4)s\pi} = z^{M_{13}}z^{N_3} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i}{16}M_{13}} e^{\frac{2\pi i}{16}N_3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s_{k,1,очн} = \frac{2i\tilde{k}}{a(w_1-w_4)}, \tilde{k} = k + \frac{M_{13}+N_3}{16}, k \in N. \quad (56)$$

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (56) (см. [22, гл. 12; 23]) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(7) в секторе, перпендикулярном стороне D_1D_2 индикаторной диаграммы, имеет следующий вид:

$$s_{k,1}(n) = \frac{2i}{a(w_1 - w_4)} \left[\tilde{k} + \frac{d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) \right], \quad (57)$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_{13} + N_3}{16}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. Из формулы Маклоренда следует:

$$\begin{aligned} e^{a(w_1 - w_4)s\pi} \Big|_{s_{k,1}(n)} &= \exp \left[a(w_1 - w_4)\pi \frac{2i}{a(w_1 - w_4)} \left(\tilde{k} + \frac{d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}} + \dots \right) \right] = \\ &= z^{M_{33}} z^{N_3} \left[1 + \frac{2\pi i d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) \right]; \\ \frac{1}{s^{15}} \Big|_{s_{k,1}(n)} &= \frac{a^{15}(w_1 - w_4)^{15}}{2^{15} i^{15}} \frac{1}{\tilde{k}^{15}} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right) \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Подставляя формулы (57), (58) в уравнение (55), вычисляем:

$$\begin{aligned} &z^{M_{13}} z^{N_3} \left[1 + \frac{2\pi i d_{15,k,1}(n)}{\tilde{k}^{15}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) \right] \cdot \left[1 - \frac{(w_1 + w_2 + w_3) a^{15} (w_1 - w_4)^{15}}{16 a^{15} 2^{15} i^{15} \tilde{k}^{15}} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{16}}\right) \right) \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a11} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) \right] - \\ &- z^{M_{13}} z^{N_3} \left[1 - \frac{(w_2 + w_3 + w_4) a^{15} (w_1 - w_4)^{15}}{16 a^{15} 2^{15} i^{15} \tilde{k}^{15}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a22} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) \right] - \\ &- \frac{1}{16 a^{15}} \frac{a^{15} (w_1 - w_4)^{15}}{2^{15} i^{15} \tilde{k}^{15}} \left[w_4 z^{N_3} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{2\tilde{k}ti} dt_{a14} - \right. \\ &\quad \left. - w_1 z^{M_{13}} z^{M_{13}} z^{N_3} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{-2\tilde{k}ti} dt_{a41} \right] + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{30}}\right) = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

При $1/\tilde{k}^0$ в уравнении (59) получается верное равенство. Приравнявая в уравнении (59) коэффициенты при $1/\tilde{k}^{15}$, выводим следующую формулу:

$$d_{15,k,1}(n) = \frac{(w_1 - w_4)^{16}}{16\pi 2^{16} i^{16}} \left\{ \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a11} + \frac{e^{\frac{7\pi i}{16}}}{w_1 - w_4} \frac{2i}{2i} \left[e^{\frac{7\pi i}{16}} e^{-\frac{2\pi i}{16} M_{13}} \times \right. \right.$$

$$\times \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{2\tilde{k}ti} dt_{a14} - e^{-\frac{7\pi i}{16}} e^{\frac{2\pi i}{16} M_{2N-3}} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) e^{-2\tilde{k}ti} dt_{a41} \Bigg] \Bigg\}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (60)$$

Применяя формулу (8), находим:

$$\frac{2ie^{\frac{7\pi i}{16}}}{w_1 - w_4} = \frac{2i}{e^{\frac{7\pi i}{16}} \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{16} 3} \right]} = -\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)}; (w_1 - w_4)^{16} = (-1)2^{16} \sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right). \quad (61)$$

Подставляя формулу (61) в (60), получаем:

$$d_{15,k,1}(n) = \frac{(-1)^7 \sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right)}{16\pi} \times \left[\int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) dt_{a11} - \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) \sin\left(2\tilde{k}t + \frac{3\pi}{16} - \frac{3\pi}{16} M_{13}\right) dt \right], \quad k=1,2,3,\dots \quad (62)$$

Находя предел при $n \rightarrow +\infty$, из формулы (62) получаем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{15,k,1}(n) = \frac{(-1)^7 \sin^{16}\left(\frac{3\pi}{16}\right)}{16\pi} \times \left[1 - \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} q_2(t) \sin\left(2\tilde{k}t + \frac{3\pi}{16} - \frac{2\pi}{16} M_{13}\right) dt \right],$$

эта формула дает спектр предельного оператора (1)–(7) с потенциалом дельта-функцией.

Список литературы

1. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.
2. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 1986. № 6. С. 3–6.
3. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады Академии наук. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
4. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.

5. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 530–532.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 736 с.
7. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
8. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
9. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 188–197.
10. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
11. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2008. № 8. С. 172–187.
12. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
13. Митрохин С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 136–149.
14. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ -функции // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 735–751.
15. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма – Лиувилля с δ -потенциалом // Успехи математических наук. 2000. Т. 55, № 6. С. 155–156.
16. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
17. Березин Ф. А., Фадеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии наук. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
18. Борисов Д. И. О лакунах в спектре Лапласиана в полосе с периодическим дельта-взаимодействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 46–53.
19. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Сер. : Математика. 2018. № 6. С. 31–47.
20. Митрохин С. И. Спектральные свойства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. 2017. № 4. С. 3–15.
21. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
22. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М. : Мир, 1967. 548 с.
23. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

References

1. Il'in V.A. On the convergence of the expansion in terms of eigenfunctions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 1977;22(5):698–723. (In Russ.)
2. Mitrokhin S.I. Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. I, Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series I, Mathematics, Mechanics*. 1986;6:3–6. (In Russ.)
3. Mitrokhin S.I. On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 1997;356(1):13–15. (In Russ.)
4. Mitrokhin S.I. Trace formulas for a boundary value problem with a functional differential equation with a discontinuous coefficient. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1986;22(6):927–931. (In Russ.)
5. Mitrokhin S.I. Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1992;28(3):530–532. (In Russ.)
6. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1977:736. (In Russ.)
7. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Sturm – Liouville operators with singular potentials. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 1999;66(6):897–912. (In Russ.)
8. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asymptotics of any order of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on an interval with summable potential. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1998;34(10):1423–1426. (In Russ.)
9. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a fourth-order differential operator with summable coefficients. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute*. 2010;270:188–197. (In Russ.)
10. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a certain differential operator with summable coefficients with lagging argument. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal = Ufa mathematical journal*. 2011;3(4):95–115. (In Russ.)
11. Mitrokhin S.I. Spectral properties of a differential operator with an integrable potential and a smooth weight function. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Bulletin of Samara University. Natural sciences' series*. 2008;8:172–187. (In Russ.)
12. Mitrokhin S.I. Spectral properties of boundary value problems for a functional differential equation with summable coefficients. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2010;46(8):1085–1093. (In Russ.)
13. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with summable potential. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of Institute of mathematics and mechanics of Ural department of the Russian Academy of Sciences*. 2019;25(1):136–149. (In Russ.)
14. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and the trace formula for potential containing δ -functions. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2002;38(6):735–751. (In Russ.)
15. Savchuk A.M. Regularized trace of the first order of the Sturm – Liouville operator with δ -potential. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematical sciences*. 2000;55(6):155–156. (In Russ.)
16. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Trace formula for Sturm-Liouville operators with singular potentials. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 2001;69(3):427–442. (In Russ.)
17. Berezin F.A., Fadeev L.D. Remark on the Schrödinger equation with singular potential. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 1961;137(5):1011–1014. (In Russ.)

18. Borisov D.I. On gaps in the Laplacian spectrum in a band with periodic delta interaction. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of Institute of mathematics and mechanics of Ural department of the Russian Academy of Sciences*. 2018;24(2):46–53. (In Russ.)
19. Mitrokhin S.I. Asymptotics of the eigenvalues of a differential operator with an alternating weight function. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics*. 2018;6:31–47. (In Russ.)
20. Mitrokhin S.I. Spectral properties of differential operators of even order with summable coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. I, Matematika. Mekhanika = Bulletin Moscow University. Series I, Mathematics. Mechanics*. 2017;4:3–15. (In Russ.)
21. Naymark M.A. *Lineynye differentsial'nye operatory = Linear differential operators*. Moscow: Nauka, 1969:528. (In Russ.)
22. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya = Differential-difference equations*. Moscow: Mir, 1967:548. (In Russ.)
23. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A. On some new results in the theory of regularized traces of differential operators. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1982;18(1):109–116. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Иванович Митрохин

кандидат физико-математических наук,
доцент, старший научный сотрудник
Научно-исследовательского
вычислительного центра, Московский
государственный университет имени
М. В. Ломоносова (Россия, г. Москва,
Ленинские Горы, 1, строение 6)

E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Sergey I. Mitrokhin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, senior
staff scientist of Research Computing
Center, Lomonosov Moscow State
University (building 6, 1 Leninskiye
Gory, Moscow, Russia)

Поступила в редакцию / Received 17.09.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 05.10.2020

Принята к публикации / Accepted 21.12.2020

УДК 519.7

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей

Е. Е. Трифонова

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия
etrifonova@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Объектом исследования является выразимость рациональных вероятностей путем преобразования булевыми функциями случайных величин с распределениями из некоторого начального множества. Одним из важных вопросов при исследовании выразимости является конечная порожденность множеств распределений, т.е. возможности с использованием некоторого конечного набора начальных распределений выразить все распределения из требуемого класса. В рамках данной работы исследуется конечная порожденность вероятностей, выражаемых пятеричными дробями, при преобразованиях случайных величин функцией голосования. *Материалы и методы.* Для изучения выразительных возможностей преобразователей вероятностей используются методы, совмещающие теорию булевых функций и математический анализ, а также элементарная теория чисел. *Результаты.* В данной работе показано, что преобразования случайных величин с распределениями из конечного множества с помощью функции голосования не позволяют выразить все вероятности, записываемые пятеричными дробями. *Выводы.* В работе доказана бесконечная порожденность класса рациональных вероятностей при преобразованиях функцией голосования, являющейся достаточно мощным преобразователем вероятностей. Хотя использованные методы не переносятся непосредственно на другие важные преобразующие системы (например, «конъюнкция, дизъюнкция»), они предоставляют нетривиальный пример доказанной бесконечной порожденности класса вероятностей.

Ключевые слова: бернуллиевская случайная величина, функция голосования, конечная порожденность, преобразование случайных величин

Для цитирования: Трифонова Е. Е. О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 39–48. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers

E.E. Trifonova

Keldysh Institute of Applied Mathematics
(Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia
etrifonova@yandex.ru

Abstract. *Background.* The object of the research is the expressibility of rational probabilities by transforming random variables with distributions from some initial set by Boolean func-

tions. One of the important questions in the study of expressibility is the finite generation of the sets of distributions, i.e. the possibility of expressing all distributions from the required class using some finite set of initial distributions. Within the framework of this work, we investigate the finite generation of probabilities expressed by fivefold fractions when transforming random variables by the voting function. *Materials and methods.* To study the expressive capabilities of probability converters, methods are used that combine the theory of Boolean functions and mathematical analysis, as well as elementary number theory. *Results.* In this article, it is shown that transformations of random variables with distributions from a finite set using the voting function do not allow one to express all the probabilities written in fivefold fractions. *Conclusions.* The work proves the infinite generation of the class of rational probabilities under transformations by the voting function, which is a rather powerful probability transformer. Although the methods used do not carry over directly to other important transformative systems (for example, “conjunction, disjunction”), they provide a non-trivial example of the proven infinite generation of the probability class.

Keywords: Bernoulli random variable, majority function, finite generativeness, random variable transformation

For citation: Trifonova E.E. On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1:39–48. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-4

Введение

В настоящее время понятие «преобразователя вероятности» – детерминированного устройства, получающего на входе значения случайных величин и осуществляющего вычисления с ними, тем самым генерирующего новые случайные величины с иными распределениями, регулярно возникает в работах различных авторов. Одним из вариантов таких преобразователей являются «алгебраические» – порождающие новую случайную величину путем применения алгебраических операций к конечному набору случайных величин. Свойства таких преобразователей рассматриваются, например, в [1–7]. Данная работа также посвящена исследованию таких преобразователей для бернуллиевских случайных величин. В качестве преобразующих операций рассматриваются булевы функции.

Преобразования бернуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями весьма подробно изучены в работах Р. Л. Схиртладзе, Ф. И. Салимова и Р. М. Колпакова. Одним из важных вопросов для множеств бернуллиевских распределений является вопрос о конечной порожденности, т.е. возможности получения всевозможных бернуллиевских распределений с компонентами из заданного множества рациональных чисел путем применения алгебраических преобразований из заданного класса к случайным величинам с распределениями из некоторого конечного множества начальных распределений.

Распределение бернуллиевской случайной величины полностью определяется ее вероятностью обращения в единицу, поэтому далее, говоря о бернуллиевских распределениях, будем отождествлять их с числами из отрезка $[0;1]$. В работах Р. Л. Схиртладзе [7, 8] установлено, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют из единственного начального распределения $\frac{1}{2}$ породить все множество двоично-рациональ-

ных распределений. То же верно для троично-рациональных распределений и множества начальных распределений $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. При этом для простого числа

$r > 3$ доказано, что множество начальных распределений $\left\{\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}\right\}$ не порождает всего множества r -ично рациональных распределений. В работе [7] высказана гипотеза, что для простых $r > 3$ не существует конечного множества бернуллиевских распределений, порождающего все множество r -ично-рациональных распределений. Эта гипотеза до настоящего момента не подтверждена и не опровергнута.

Дальнейшие результаты в этой области были получены Ф. И. Салимовым [9–11]. Он показал, в частности, что множества r -ично-рациональных распределений являются конечно порожденными при использовании в качестве системы преобразующих операций набора функций $\{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3, 0, 1\}$. При этом в качестве множества начальных распределений можно взять $\left\{\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}\right\}$.

В работах Р. М. Колпакова показано [12, 13], что для множеств рациональных бернуллиевских распределений $\Gamma[r_1, \dots, r_s]$, у которых в разложении знаменателя на простые множители могут встречаться числа $r_1, \dots, r_s$, относительно преобразований системой $\{\&, \vee\}$ при $s \geq 2$ всегда существуют конечные множества начальных распределений, порождающие всю совокупность $\Gamma[r_1, \dots, r_s]$. Более того, если среди $r_1, \dots, r_s$ встречается 2 или 3, в качестве множества начальных распределений можно взять все правильные дроби со знаменателем $r_1 \cdot \dots \cdot r_s$. Также в работе [6] предложены усиления системы $\{\&, \vee\}$ в классе функций, реализуемых контактными схемами, относительно которых множества распределений $\Gamma[5]$ и $\Gamma[7]$ оказываются конечно порожденными. Наконец, в работе [14] предложена система монотонных функций, относительно которой множество $\Gamma[r]$ при любом простом r порождается множеством всех правильных дробей со знаменателем r .

Таким образом, к настоящему моменту вопрос о конечной порожденности множеств $\Gamma[r]$ относительно системы $\{\&, \vee\}$ при $r > 3$ остается открытым, но получен ряд результатов о конечной порожденности этого множества в более сильных системах. При этом содержательных «отрицательных» результатов, свидетельствующих о бесконечной порожденности множеств $\Gamma[r]$ относительно каких-либо систем, практически нет. В настоящей работе мы изучаем вопрос конечной порожденности множества $\Gamma[5]$ относительно преобразования функцией голосования (медианой). Хотя полученные результаты не позволяют непосредственно сделать какие-то выводы о конечной порожденности относительно системы $\{\&, \vee\}$, они представляют собой пример доказанной бесконечной порожденности относительно достаточно мощной преобразующей системы: как следует из результатов [15], система из медианы, так же как и система $\{\&, \vee\}$, позволяет из конечного множества начальных распределений породить множество, всюду плотное на отрезке $[0; 1]$.

1. Определения

Пусть x – случайная величина, принимающая значения 0 и 1. Если x принимает значение 1 с вероятностью p , то вероятность значения 0 равна $(1-p)$, т.е. распределение случайной величины x однозначно определяется вероятностью ее обращения в 1. Далее будем считать, что каждой случайной величине, принимающей значения 0 и 1, сопоставлено число $p \in [0;1]$.

Будем рассматривать преобразования, осуществляемые в результате подстановки независимых в совокупности случайных величин со значениями 0 и 1 вместо переменных булевых функций. Если $f(x_1, \dots, x_n): \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ – некоторая булева функция, то вероятностная функция $\hat{f}(x_1, \dots, x_n): [0;1]^n \rightarrow [0;1]$, индуцированная булевой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, определяется соотношением

$$\hat{f}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{\substack{(x_1, x_2, \dots, x_n): \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)=1}} \prod_{i=1}^n (x_i p_i + \bar{x}_i (1-p_i)).$$

Содержательно $\hat{f}(x_1, \dots, x_n)$ выражает вероятность того, что случайная величина $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1, если вероятности обращения в единицу величин $x_1, \dots, x_n$ равны $p_1, \dots, p_n$ соответственно.

Напомним, что булева функция $m(x, y, z)$, определяемая как $m(x, y, z) = x \& y \vee y \& z \vee x \& z$, называется *медианой* или *функцией голосования*. Индуцированная медианой функция вероятностей $\hat{m}(x, y, z)$ выражается следующим образом:

$$\hat{m}(x, y, z) = xyz + xy(1-z) + (1-x)yz + x(1-y)z = xy + yz + xz - 2xyz.$$

Введем обозначение для множества чисел, выражимых правильными r -ичными дробями, где r – простое число: $\Gamma[r] = \left\{ \frac{m}{r^\alpha} \mid m \leq r^\alpha, \alpha \in \mathbb{N} \right\}$. Тогда, в частности, $\Gamma[5]$ – множество чисел, выражимых с помощью пятеричных правильных дробей.

Также для удобства введем обозначения для некоторых подмножеств пятеричных дробей, положив $A(5^i) = \left\{ \frac{1}{5^i}, \frac{2}{5^i}, \dots, \frac{5^i-1}{5^i} \right\}$ и $A_k = \bigcup_{i=1}^k A(5^i)$.

Объектом исследования настоящей работы является выразимость рациональных вероятностей путем преобразования булевыми функциями (медианой) случайных величин с распределениями из некоторого начального множества $G \subseteq [0;1]$. Формально определим множество *выражимых вероятностей* $V(G)$ следующим образом: во-первых, любой элемент $g \in G$ включается в $V(G)$; во-вторых, если g_1, g_2, g_3 уже включены в $V(G)$, то $\hat{m}(g_1, g_2, g_3)$ также включается в $V(G)$; иных элементов множество $V(G)$ не содержит. В обозначениях работы [1] определенное нами множество $V(G)$ записывается как $V_{\{m\}}(G)$.

В рамках данной работы будем исследовать, выполняется ли равенство $V(A_k) = \Gamma[5]$ для какого-либо k , т.е. можно ли выразить произвольную пятёрочную дробь, используя медиану и множество A_k в качестве начального.

2. Основные утверждения

Лемма 1. Функция $\hat{m}(x, y, z)$ является возрастающей по каждому из аргументов на множестве $\left[\frac{1}{5^{k_1}}; \frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}} \right] \times \left[\frac{1}{5^{k_2}}; \frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}} \right] \times \left[\frac{1}{5^{k_3}}; \frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}} \right]$ и принимает минимальное и максимальное значения в точках $\left(\frac{1}{5^{k_1}}, \frac{1}{5^{k_2}}, \frac{1}{5^{k_3}} \right)$ и $\left(\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}}, \frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}}, \frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}} \right)$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим $\hat{m}(x, y, z)$ как функцию трех переменных. Тогда частные производные по каждой из трех переменных могут быть записаны как

$$\begin{cases} \hat{m}'_x = y + z - 2yz, \\ \hat{m}'_y = x + z - 2xz, \\ \hat{m}'_z = x + y - 2xy. \end{cases}$$

В особых точках частные производные функции по каждой из трех переменных должны обращаться в ноль, т.е.:

$$\begin{cases} y + z - 2yz = 0, \\ x + z - 2xz = 0, \\ x + y - 2xy = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что особыми являются только точки $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$, которые не принадлежат области $\left[\frac{1}{5^{k_1}}; \frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}} \right] \times \left[\frac{1}{5^{k_2}}; \frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}} \right] \times \left[\frac{1}{5^{k_3}}; \frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}} \right]$.

Заметим, что на области определения все частные производные больше 0, функция возрастает по каждой из переменных.

Следовательно, в рассматриваемой области в силу возрастания функции и отсутствия особых точек внутри нее минимальное значение функция принимает в точке $\left(\frac{1}{5^{k_1}}, \frac{1}{5^{k_2}}, \frac{1}{5^{k_3}} \right)$, а максимальное — в точке $\left(\frac{5^{k_1}-1}{5^{k_1}}, \frac{5^{k_2}-1}{5^{k_2}}, \frac{5^{k_3}-1}{5^{k_3}} \right)$. $\square$

Следствие 1. Пусть $x = \frac{a}{5^{k_1}}$, $y = \frac{b}{5^{k_2}}$, $z = \frac{c}{5^{k_3}}$ — правильные дроби. Тогда справедлива следующая оценка для значения $\hat{m}(x, y, z)$:

$$\frac{5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} - 2}{5^{k_1+k_2+k_3}} \leq \hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right) \leq \frac{5^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 5^{k_3} - 5^{k_1} - 5^{k_2} - 5^{k_3} + 2}{5^{k_1+k_2+k_3}}. \quad (1)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 наименьшее значение на дробях со знаменателями 5^{k_1} , 5^{k_2} , 5^{k_3} функция $\hat{m}$ принимает в точке $\left(\frac{1}{5^{k_1}}, \frac{1}{5^{k_2}}, \frac{1}{5^{k_3}}\right)$, тогда

$$\hat{m}(x, y, z) \geq \frac{1}{5^{k_1+k_2}} + \frac{1}{5^{k_1+k_3}} + \frac{1}{5^{k_2+k_3}} - 2 \cdot \frac{1}{5^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} - 2}{5^{k_1+k_2+k_3}}.$$

Аналогично используем лемму 1 для оценки наибольшего значения:

$$\begin{aligned} \hat{m}(x, y, z) &\leq \frac{(5^{k_1} - 1)(5^{k_2} - 1)}{5^{k_1+k_2}} + \frac{(5^{k_1} - 1)(5^{k_3} - 1)}{5^{k_1+k_3}} + \frac{(5^{k_2} - 1)(5^{k_3} - 1)}{5^{k_2+k_3}} - \\ &- 2 \cdot \frac{(5^{k_1} - 1)(5^{k_2} - 1)(5^{k_3} - 1)}{5^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{5^{k_1+k_2+k_3} - 5^{k_1} - 5^{k_2} - 5^{k_3} + 2}{5^{k_1+k_2+k_3}}. \quad \square \end{aligned}$$

Утверждение 1. Если $x = \frac{a}{5^{k_1}}$, $y = \frac{b}{5^{k_2}}$, $z = \frac{c}{5^{k_3}}$ – несократимые правильные дроби, $k_1, k_2, k_3 \in N$, то значение $\hat{m}(x, y, z)$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{5^h}$, где $B \in N$, $h < k_1 + k_2 + k_3$.

Доказательство. Предположим, что $\hat{m}(x, y, z) = \frac{B}{5^h}$, где $h < k_1 + k_2 + k_3$,

тогда $5^{k_1+k_2+k_3} \cdot \hat{m}(x, y, z) \bmod 5 = 0$. Подставляя значения x, y, z в функцию $\hat{m}$, получим равенства:

$$\begin{aligned} \hat{m}(x, y, z) \cdot 5^{k_1+k_2+k_3} \bmod 5 &= \frac{5^{k_3}ab + 5^{k_1}bc + 5^{k_2}ac - 2abc}{5^{k_1+k_2+k_3}} \cdot 5^{k_1+k_2+k_3} \bmod 5 = \\ &= ab \cdot 5^{k_3} + bc \cdot 5^{k_1} + ac \cdot 5^{k_2} - 2abc \bmod 5 = -2abc \bmod 5. \end{aligned}$$

Тогда, если наше предположение верно, то $2abc \bmod 5 = 0$. Это может быть выполнено, только если a, b или c равны нулю $\bmod 5$. Однако это невозможно, поскольку по условию дроби $\frac{a}{5^{k_1}}$, $\frac{b}{5^{k_2}}$, $\frac{c}{5^{k_3}}$ являются несократимыми и правильными.

Отсюда получаем, что значение $\hat{m}(x, y, z)$ не может быть представлено в виде $\frac{B}{5^h}$, где $h < k_1 + k_2 + k_3$. $\square$

Утверждение 2. Для любых чисел $k_1, k_2, k_3 \in N$, удовлетворяющих $k_1 + k_2 + k_3 = l$, выполняется: $5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} \geq 3 \cdot 5^{\lceil \frac{l}{3} \rceil}$.

Доказательство. Функция $\varphi(x, y, z) = 5^x + 5^y + 5^z$ возрастает по каждой из переменных. Так как $k_1 + k_2 + k_3 = l$, то возможны два варианта:

1. Одно из значений k_1, k_2, k_3 больше $\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor$.
2. Выполнено условие $k_1, k_2, k_3 \leq \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor$.

Рассмотрим первый случай. Без нарушения общности можно считать, что $k_1 > \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor$. Тогда получаем:

$$5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} \geq 5 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} + 5^{k_2} + 5^{k_3} > 5 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} > 3 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor},$$

что доказывает утверждение в первом случае.

Рассмотрим второй случай, когда $k_1, k_2, k_3 \leq \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor$. Это возможно только в том случае, когда l делится на 3 и $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{l}{3}$. Тогда получаем:

$$5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} = 3 \cdot 5^{\frac{l}{3}} = 3 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor},$$

что доказывает утверждение во втором случае. $\square$

Отметим, что утверждение 2 частично следует из S -выпуклости функции $\varphi(x, y, z)$ (см. [16]), однако во всей полноте его проще доказать непосредственно, чем выводить из более общих свойств.

Утверждение 3. Для любого $l \in N$, $l > 3$, найдется такое D , что $\frac{D}{5^l}$ не представимо в виде $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right)$, где $\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}$ – несократимые правильные дроби, $a, b, c, k_1, k_2, k_3 \in N$.

Доказательство. Положим $D = 3 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} - 3$. Очевидно, что $\frac{D}{5^l}$ является правильной несократимой дробью.

Предположим, что дробь $\frac{D}{5^l}$ может быть выражена путем применения $\hat{m}(x, y, z)$ к трем пятеричным дробям со знаменателями $5^{k_1}, 5^{k_2}, 5^{k_3}$, и рассмотрим различные случаи соотношения между $k_1 + k_2 + k_3$ и l .

Если $l = k_1 + k_2 + k_3$, то по утверждению 2 и следствию 1 получаем:

$$\frac{D}{5^l} < \frac{3 \cdot 5^{\left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor} - 2}{5^l} \leq \frac{5^{k_1} + 5^{k_2} + 5^{k_3} - 2}{5^l} \leq \hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right).$$

Таким образом, случай $k_1 + k_2 + k_3 = l$ невозможен.

Из утверждения 1 вытекает невозможность случая $l < k_1 + k_2 + k_3$.

Наконец, если предположить, что $l > k_1 + k_2 + k_3$, и при этом выполнено равенство $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right) = \frac{B}{5^{k_1+k_2+k_3}} = \frac{D}{5^l}$, то $D = B \cdot 5^{l-(k_1+k_2+k_3)}$, откуда $D \bmod 5 = 0$, что противоречит тому, что $\frac{D}{5^l}$ – несократимая дробь.

Следовательно, ни для каких a, b, c, k_1, k_2, k_3 нельзя представить дробь $\frac{3 \cdot 5^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} - 3}{5^l}$ в виде $\hat{m}\left(\frac{a}{5^{k_1}}, \frac{b}{5^{k_2}}, \frac{c}{5^{k_3}}\right)$. Утверждение доказано. $\square$

Теорема 1. Для любого $k \in N$ имеет место $V(A_k) \neq \Gamma[5]$.

Доказательство. Пусть задано какое-то k . Возьмем $l = k + 1$. Тогда

дробь $\frac{3 \cdot 5^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} - 3}{5^l}$, очевидно, будет являться правильной и несократимой.

Представим все дроби, содержащиеся в A_k , в несократимом виде. Тогда для

$\frac{3 \cdot 5^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} - 3}{5^l}$ выполняется следующее:

1. Она не лежит в A_k , поскольку $l > k$.

2. Если бы она принадлежала $V(A_k)$, то в силу утверждения 1 она должна выражаться путем подстановки в $\hat{m}(x, y, z)$ элементов из A_k . Однако последнее невозможно в силу следствия 1 (см. доказательство утв. 3).

Следовательно, по определению $\frac{3 \cdot 5^{\lfloor \frac{l}{3} \rfloor} - 3}{5^l} \notin V(A_k)$. Отсюда получаем,

что $V(A_k) \neq \Gamma[5]$, какое бы k мы не взяли. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. Какую бы конечную систему $G \subset \Gamma[5]$ мы ни взяли, выполняется неравенство $V(G) \neq \Gamma[5]$.

Заключение

Таким образом, в данной работе было показано, что с помощью функции, индуцированной медианой, и конечного множества пятеричных дробей невозможно выразить произвольную пятеричную дробь.

Список литературы

1. Яшунский А. Д. Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 320–335.
2. Qian W., Riedel M. D., Zhou H., Bruck J. Transforming probabilities with combinational logic // IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst. 2011. Vol. 30, № 9. P. 1279–1292.
3. Колпаков Р. М. О многозначных преобразованиях конечных множеств бинарных распределений с рациональными вероятностями // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 1. С. 102–128.
4. Яшунский А. Д. О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами // Дискретная математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 149–159.

5. Яшунский А. Д. О преобразованиях случайных величин над линейно упорядоченным трехэлементным множеством // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию С. С. Рышкова (Тула, 25–30 мая 2015 г.). Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 206–208.
6. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 1992. № 5. С. 46–52.
7. Схиртладзе Р. Л. Моделирование случайных величин функциями алгебры логики : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1966. 14 с.
8. Схиртладзе Р. Л. О синтезе p -схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщения Академии Наук ГрузССР. 1961. Т. 26, № 2. С. 181–186.
9. Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 15. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 68–89.
10. Салимов Ф. И. Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Известия вузов. Сер.: Математика. 1981. № 5. С. 78–82.
11. Салимов Ф. И. Об одном семействе алгебраических распределений // Известия вузов. Сер.: Математика. 1988. № 7. С. 64–72.
12. Колпаков Р. М. Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π -сетями // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 1992. № 6. С. 62–65.
13. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел вероятностными контактными π -сетями // Дискретная математика. 1994. Т. 6, № 3. С. 18–38.
14. Колпаков Р. М. О порождении рациональных чисел монотонными функциями // Теоретические и прикладные аспекты математических исследований : сб. науч. тр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 13–17.
15. Яшунский А. Д. О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Синтез и сложность управляющих систем : материалы XVI Междунар. школы-семинара (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). М. : Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2006. С. 150–155.
16. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения : пер. с англ. М. : Мир, 1983. 576 с.

References

1. Yashunskiy A.D. Algebras of probability distributions on finite sets. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute*. 2018;301:320–335. (In Russ.)
2. Qian W., Riedel M.D., Zhou H., Bruck J. Transforming probabilities with combinational logic. *IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 2011;30(9):1279–1292.
3. Kolpakov R.M. Multivalued transformations of finite sets of binary distributions with rational probabilities. *Diskretnaya matematika = Discrete math.* 2005;17(1):102–128. (In Russ.)
4. Yashunskiy A.D. On transformations of probability distributions by repetition-free quasigroup formulas. *Diskretnaya matematika = Discrete math.* 2013;25(2):149–159. (In Russ.)
5. Yashunskiy A.D. On transformations of random variables over a linearly ordered three-element set. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya: materialy XIII Mezhdunar. konf., posvyashch. 85-letiyu S. S. Ryshkova (Tula, 25–30 maya 2015 g.) = Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications: proceedings of the 13th International conference dedicated to the 85th anniversary of S. S. Ryshkov (Tula, May 25-30, 2015)*. Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta im. L. N. Tolstogo, 2015:206–208. (In Russ.)

6. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by probabilistic contact networks. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics.* 1992;5:46–52. (In Russ.)
7. Skhirtladze R.L. *Modelirovanie sluchaynykh velichin funktsiyami algebrы logiki: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk = Simulation of random variables by functions of Boolean algebra: author's abstract of dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences.* Tbilisi: Izd-vo Tbilis. un-ta, 1966:14. (In Russ.)
8. Skhirtladze R.L. On the synthesis of an n-circuit from contacts with random discrete states. *Soobshcheniya Akademii Nauk GruzSSR = Reports of the Academy of Science of Georgian SSR.* 1961;26(2):181–186. (In Russ.)
9. Salimov F.I. *K voprosu modelirovaniya bulevykh sluchaynykh velichin funktsiyami algebrы logiki. Veroyatnostnye metody i kibernetika. Vyp. 15 = On the question of modeling Boolean random variables by functions of the algebra of logic. Probabilistic methods and cybernetics.* Edition 15. Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 1979:68–89. (In Russ.)
10. Salimov F.I. On a system of generators for algebras over random variables. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics.* 1981;5:78–82. (In Russ.)
11. Salimov F.I. On a family of algebraic distributions. *Izvestiya vuzov. Ser.: Matematika = University proceedings. Series: Mathematics.* 1988;7:64–72. (In Russ.)
12. Kolpakov R.M. Estimates for the complexity of generating rational numbers by probabilistic contact π -networks *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser.: Matematika. Mekhanika = Bulletin of Moscow University. Series: Mathematics. Mechanics.* 1992;6:62–65. (In Russ.)
13. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by probabilistic contact π -networks. *Diskretnaya matematika = Discrete math.* 1994;6(3):18–38. (In Russ.)
14. Kolpakov R.M. On the generation of rational numbers by monotone functions. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty matematicheskikh issledovaniy: sb. nauch. tr. = Theoretical and applied aspects of mathematical research: collected articles.* Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1994:13–17. (In Russ.)
15. Yashunskiy A.D. On probability transformations by repetition-free Boolean formulas. *Sintez i slozhnost' upravlyayushchikh sistem: materialy XVI Mezhdunar. shkoly-seminara (Sankt-Peterburg, 26–30 iyunya 2006 g.) = Synthesis and complexity of control systems: proceedings of 16th International school-seminar (Saint-Petersburg, June 26–30, 2006).* Moscow: Izd-vo mekhaniko-matematicheskogo f-ta MGU, 2006:150–155. (In Russ.)
16. Marshall A., Olkin I. *Neravenstva: teoriya mazhorizatsii i ee prilozheniya: per. s angl. = Inequalities: majorization theory and its applications: translated from English.* Moscow: Mir, 1983:576. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Екатерина Евгеньевна Трифонова
инженер-исследователь отдела № 4
«Математический отдел», сектор
№ 3 «Теоретическая кибернетика»,
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша Российской академии
наук (Россия, г. Москва, Миусская
площадь, 4)

Ekaterina E. Trifonova
Research engineer of department No. 4
“Mathematical Department”, sector № 3
“Theoretical Cybernetics”, Keldysh Institute
of Applied Mathematics (Russian Academy
of Sciences) (4 Miusskaya square, Moscow,
Russia)

E-mail: etrifonova@yandex.ru

Поступила в редакцию / Received 10.09.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 21.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020

УДК 514.7

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Базовые автоморфизмы картановых слоений, накрытых расслоениями

К. И. Шеина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Нижний Новгород, Россия

ksheina@hse.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Работа посвящена исследованию групп базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картановых слоений (M, F) , накрытых расслоениями, и нахождению достаточных условий для существования в $A_B(M, F)$ структуры конечномерной группы Ли. Класс картановых слоений, накрытых расслоениями, достаточно широк, он содержит, в частности, картановы (X, G) -слоения со связностью Эресмана, картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной, а также картановы слоения с интегрируемой связностью Эресмана. *Материалы и методы.* В работе использованы методы слоеных расслоений и накрывающих отображений. *Результаты.* Найдены достаточные условия для того, чтобы группа базовых автоморфизмов картанова слоения, накрытого расслоением, допускала структуру конечномерной группы Ли. Получены оценки размерности данной группы. Более того, для картановых слоений с интегрируемой связностью Эресмана указан способ вычисления групп базовых автоморфизмов. *Выводы.* Структура групп базовых автоморфизмов картановых слоений, накрытых расслоениями, определяется структурой глобальной группы голономии таких слоений.

Ключевые слова: картаново слоение, базовые автоморфизмы, связность Эресмана

Благодарности: автор выражает благодарность Н. И. Жуковой за полезные обсуждения и замечания.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2009-1931.

Для цитирования: Шеина К. И. Базовые автоморфизмы картановых слоений, накрытых расслоениями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 49–65. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Basic automorphisms of cartan foliations covered by fibrations

K.I. Sheina

National Research University "Higher School of Economics",
Nizhny Novgorod, Russia

ksheina@hse.ru

Abstract. *Background.* This work is devoted to the study of basic automorphisms $A_B(M, F)$ groups of Cartan foliations (M, F) covered by fibrations, and to finding sufficient conditions for the existence of a finite-dimensional Lie group structure in $A_B(M, F)$. The class of Cartan foliations covered by fibrations is quite wide; it contains, in particular,

Cartan (X, G) -foliations with Ehresmann connections, Cartan foliations with a vanishing transversal curvature, and Cartan foliations with integrable Ehresmann connection. *Methods.* We used the methods of foliated bundles and covering maps in this research. *Results.* We get sufficient conditions for the basic automorphism group of Cartan foliation covered by fibrations to admit a finite-dimensional Lie group structure in the category of Cartan foliations. Estimates of this group dimension are obtained. Moreover, for Cartan foliations with integrable Ehresmann connection, a method for computing groups of basic automorphisms is specified. *Conclusions.* The structure of basic automorphisms groups of Cartan foliations covered by fibration is determined by the structure of the global holonomy group of such foliations.

Keywords: cartan foliation, basic automorphism, Ehresmann connection

Acknowledgments: the author extends gratitude to N.I. Zhukova for the useful discussion and remarks. The work was financed by the Laboratory of Dynamic Systems and Applications of HSE University, a grant of the Ministry of Science and Higher Education, agreement No. 075-15-2009-1931

For citation: Sheina K.I. Basic automorphisms of cartan foliations covered by fibrations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:49–65. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-5

Введение

Одним из основных объектов, ассоциированных с геометрической структурой на гладком многообразии, является его группа автоморфизмов. Во введении к монографии Ш. Кобаяси [1] подчеркнуто, что существование структуры конечномерной группы Ли в группе автоморфизмов многообразия с геометрической структурой является одной из центральных проблем дифференциальной геометрии.

Как известно, решенная 5-я проблема Гильберта посвящена нахождению условий, при которых топологическая группа допускает структуру группы Ли [2]. Из многочисленных работ Э. Картана, Р. Майера, Н. Стинрода, К. Номидзу, Ш. Кабаяси, Ш. Эресмана и других авторов известно, что группы автоморфизмов многих геометрических структур являются группами Ли преобразований (см. обзор [3]).

Пространства, которые сейчас называются картановыми геометриями, были введены Э. Картаном в 1920-х гг. Теория картановых геометрий изложена в монографиях А. Чапа, Я. Словака [4], Р. В. Шарпе [5], М. Крампина и Д. Саундерса [6]. В настоящее время картановы геометрии и картановы слоения исследуются многими математиками и находят применение в различных физических теориях (см. например, [7–10]).

Пусть (M, F) – гладкое слоение. Напомним, что голономно инвариантная геометрическая структура на многообразии M называется трансверсальной к слоению (M, F) . Другое, эквивалентное определение трансверсальной геометрической структуры, в качестве которой выступает картанова геометрия, дано в разд. 1. В теории слоений с трансверсальными картановыми геометриями в качестве морфизмов рассматриваются локальные диффеоморфизмы, переводящие слои в слои и сохраняющие трансверсальную геометрию (см. раздел 1). Категория картановых слоений обозначается через $\mathcal{CS}$.

Данная работа посвящена исследованию групп автоморфизмов картановых слоений, т.е. слоений, допускающих в качестве трансверсальной

структуры картанову геометрию. Изучение картановых слоений мотивировано тем, что такие широкие классы слоений, как параболические, конформные, проективные, псевдоримановы, лоренцевы, вейлевые, трансверсально однородные слоения и слоения с трансверсальной линейной связностью, – принадлежат к классу картановых слоений. Поэтому исследование картановых слоений позволяет с единой точки зрения изучать общие свойства указанных слоений, в то время как многие авторы изучают их по отдельности.

Пусть $A(M, F)$ – полная группа автоморфизмов картанова слоения (M, F) в категории $C\mathfrak{S}$. Группа $A_L(M, F) := \{f \in A(M, F) \mid f(L_\alpha) = L_\alpha \forall L_\alpha \in F\}$ является нормальной подгруппой $A(M, F)$ и называется *группой слоевых автоморфизмов* слоения (M, F) . Факторгруппа $A(M, F)/A_L(M, F)$ называется *группой базовых автоморфизмов* и обозначается через $A_B(M, F)$. Подчеркнем, что группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картанова слоения (M, F) является инвариантом в категории картановых слоений CF .

Мы исследуем группы базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картановых слоений (M, F) , накрытых расслоением, и находим достаточные условия для существования в группе $A_B(M, F)$ структуры конечномерной группы Ли. Дж. Лесли, впервые решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях и рассмотрел приложение к слоениям с трансверсальной G -структурой. Для слоений с полными трансверсально проектируемыми аффинными связностями данная проблема решалась И. В. Белько [11]. Группы базовых автоморфизмов полных слоений с эффективными трансверсальными жесткими геометриями исследованы Н. И. Жуковой [12], ею введен алгебраический инвариант, названный структурной алгеброй Ли слоения, и доказано, что равенство данного инварианта нулю является достаточным условием для того, чтобы группа базовых автоморфизмов данного класса слоений допускала структуру конечномерной группы Ли. В статье [13] исследовалось существование структуры группы Ли в группах базовых автоморфизмов картановых слоений, моделируемых на неэффективных картановых геометриях.

1. Основные результаты

Среди картановых слоений выделяются слоения, накрытые расслоениями.

Определение 1. Слоение (M, F) называется *накрытым расслоением*, если слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$, образовано слоями локально тривиального расслоения $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$.

Следующая теорема описывает глобальную структуру картанова слоения, накрытого расслоением.

Теорема 1. Пусть (M, F) – картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии ξ , накрытое расслоением $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, где $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрытие. Тогда:

1) существует регулярное накрывающее отображение $k: \hat{M} \rightarrow M$ такое, что индуцированное слоение $\hat{F}$ образовано слоями локально тривиального расслоения $r: \hat{M} \rightarrow B$ над односвязным многообразием B , причем ξ индуцирует на B картанову геометрию η , локально изоморфную ξ ;

2) определен эпиморфизм $\chi: \pi_1(M, x) \rightarrow \Psi$, $x \in M$, фундаментальной группы $\pi_1(M, x)$ на подгруппу Ψ группы Ли автоморфизмов $Aut(B, \eta)$ картанова многообразия (B, η) ;

3) группа накрывающих преобразований накрытия $k: \hat{M} \rightarrow M$ изоморфна группе Ψ .

Определение 2. Группа $\Psi = \Psi(M, F)$, удовлетворяющая теореме 1, называется *глобальной группой голономии* картанова слоения (M, F) , накрытого расслоением.

Мы приводим подробное доказательство следующей теоремы, приведенной без доказательства в статье [13, Proposition 8]. Эта теорема устанавливает связь между группой базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ картанова слоения (M, F) , накрытого расслоением, и его глобальной группой голономии Ψ .

Теорема 2. Пусть (M, F) – картаново слоение, накрытое расслоением $r: \hat{M} \rightarrow B$, где B – односвязное картаново многообразие. Предположим, что глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли $Aut(B, \eta)$. Пусть $N(\Psi)$ – нормализатор Ψ в группе $Aut(B, \eta)$. Тогда группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ является группой Ли изоморфной открыто-замкнутой подгруппе Ли фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$ и $\dim(A_B(M, F)) = \dim(N(\Psi)/\Psi)$. Структура группы Ли в группе $A_B(M, F)$ единственна.

Следующая теорема указывает способ вычисления групп базовых автоморфизмов для картановых слоений с интегрируемой связностью Эресмана.

Теорема 3. Пусть (M, F) – картаново слоение с интегрируемой связностью Эресмана Q . Тогда:

1) существует регулярное накрытие $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ такое, что $\tilde{M} = L_0 \times B$, где L_0 – многообразие, диффеоморфное любому слою с тривиальной группой голономии, а B – односвязное многообразие, причем индуцированное слоение $\tilde{F} = \tilde{k} * F$ образовано слоями канонической проекции $r: L_0 \times B \rightarrow B$ на второй сомножитель, а на B индуцирована картанова геометрия η , относительно которой $\tilde{k}$ – морфизм картановых слоений (M, F) и $(\tilde{M}, \tilde{F})$;

2) слоение (M, F) является $(Aut(B, \eta), B)$ -слоением;

3) если, кроме того, глобальная группа голономии Ψ является дискретной подгруппой группы Ли $Aut(B, \eta)$ и нормализатор $N(\Psi)$ равен централизатору $Z(\Psi)$ группы Ψ в $Aut(B, \eta)$, то имеет место равенство $A_B(M, F) \cong N(\Psi)/\Psi$.

Используя теорему 3, мы строим пример вычисления группы базовых автоморфизмов некоторого конформного слоения произвольной коразмерности q , где $q \geq 3$ на $(q+1)$ -мерном многообразии. Другие примеры построены в [13].

2. Категория картановых слоений

Категория картановых геометрий. Пусть G и H – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, причем H – замкнутая подгруппа в G . Главное H -расслоение $P(N, H)$ над гладким многообразием N с проекцией $p: P \rightarrow N$ и $\mathfrak{g}$ -значной 1-формой $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ называется *картановой геометрией* на N типа (G, H) , если выполнены следующие условия:

с₁) отображение $\omega_u: T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \quad \forall u \in P$ – изоморфизм векторных пространств;

с₂) $\omega(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* – фундаментальное векторное поле;

с₃) форма ω является H -эквивариантной, т.е. $R_h^* \omega = Ad_G(h^{-1})\omega$ для каждого $h \in H$, где $Ad_G: H \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление подгруппы Ли $H \subset G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При этом $\mathfrak{g}$ -значная форма ω называется *картановой связностью*. Будем обозначать картанову геометрию типа (G, H) через $\xi = (P(N, H), \omega)$. Пара (N, ξ) – картаново многообразие.

Максимальная нормальная подгруппа K группы G , содержащаяся в H , называется ядром пары (G, H) . Обозначим алгебру Ли группы K через $\mathfrak{k}$. Картанова геометрия $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) , моделируемая на паре групп Ли (G, H) , называется *эффективной*, если ядро K пары (G, H) тривиально. Далее предполагаем, что все рассматриваемые картановы геометрии являются эффективными.

Пусть $\xi = (P(N, H), \omega)$ и $\xi' = (P'(N', H), \omega')$ – две картановы геометрии со структурной группой H . Морфизмом из ξ в ξ' называют гладкое отображение $\Gamma: P \rightarrow P'$, для которого $\Gamma^* \omega' = \omega$ и $R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a$, $a \in H$. Категорию картановых геометрий обозначим через Car . Если $\Gamma \in Mor(\xi, \xi')$, тогда проекция $\gamma: N \rightarrow N'$ определена равенством $p' \circ \Gamma = \gamma \circ p$, где $p: P \rightarrow N$ и $p': P' \rightarrow N'$ – проекции, соответствующие H -расслоениям.

Проекция γ называется *автоморфизмом картановых многообразий* (N, ξ) и (N', ξ') . Обозначим через $Aut(N, \xi)$ группу всех автоморфизмов картанова многообразия (N, ξ) , а через $A(\xi)$ – группу всех автоморфизмов картановой геометрии ξ . Пусть $A(P, \omega) := \{\Gamma \in Diff(P) | \Gamma^* \omega = \omega\}$ – группа автоморфизмов параллелизуемого многообразия (P, ω) , которая, как известно, является группой Ли, причем $\dim(A(P, \omega)) \leq \dim P$. Заметим, что $A(\xi) = \{\Gamma \in A(P, \omega) | R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a\}$ – замкнутая подгруппа группы Ли $A(P, \omega)$. Следовательно, $A(\xi)$ является группой Ли, причем определено отображение $\sigma: A(\xi) \rightarrow Aut(N, \xi): \Gamma \mapsto \gamma$, где γ – проекция автоморфизма Γ

на N , которое в силу эффективности картановой геометрии является изоморфизмом групп Ли.

Картановы слоения. Пусть N – гладкое q -мерное, возможно не связное, многообразие; M – гладкое n -мерное многообразие, где $0 < q < n$. Предположим, что многообразие N наделено картановой геометрией $\xi = (P(N, H), \omega)$. Пусть $p: P \rightarrow N$ – проекция H -расслоения. На каждом открытом подмножестве $V \subset N$ индуцирована картанова структура $\xi_V = (P_V(V, H), \omega_V)$ типа (G, H) такая, что $P_V := p^{-1}(V)$ и $\omega_V := \omega|_{P_V}$.

Напомним, что (N, ξ) -коциклом на M называется семейство $\varsigma = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{U_i | i \in J\}$ – открытое покрытие многообразия M открытыми связными подмножествами U_i из M , а $f_i: U_i \rightarrow N$ – субмерсии со связными слоями;

2) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, то существует изоморфизм $\Gamma_{ij}: \xi_{f_j(U_i \cap U_j)} \rightarrow \xi_{f_i(U_i \cap U_j)}$ картановых геометрий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i \cap U_j)$ и $f_i(U_i \cap U_j)$ такой, что проекция γ_{ij} изоморфизма Γ_{ij} удовлетворяет равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$;

3) если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $i, j, k \in J$, то $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ для любого $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ и $\gamma_{ii} = id_{U_i}$.

Два (N, ξ) -коцикла называются эквивалентными, если существует (N, ξ) -коцикл, содержащий оба этих коцикла.

Пусть $\left[\left\{ U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J} \right\} \right]$ – класс эквивалентности (N, ξ) -коцикла на многообразии M , содержащий коцикл ς . Класс эквивалентности (N, ξ) -коциклов задает картаново слоение на многообразии M , следующим образом. Пусть семейство $\Sigma = \{f_i^{-1}(v) | v \in V_i, i \in J\}$ образует базу некоторой топологии τ в M . Компоненты линейной связности топологического пространства (M, τ) образуют разбиение $F := \{L_\alpha | \alpha \in J\}$ многообразия M . Пара (M, F) называется картановым слоением коразмерности q моделируемым на картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$, которая называется трансверсальной для слоения (M, F) . Подмножество $L_\alpha | \alpha \in J$ называются слоями слоения (M, F) . При этом говорят, что (M, F) задано (N, ξ) -коциклом ς .

Морфизмы картановых слоений. Пусть (M, F) и (M', F') – картановы слоения, определенные (N, ξ) -коциклом $\varsigma = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}$ и (N', ξ') -коциклом $\varsigma' = \{U'_i, f'_i, \{\gamma'_{ij}\}\}$ соответственно. Все объекты, относящиеся к ς' , отмечены штрихом.

Пусть $f: M \rightarrow M'$ – гладкое отображение, которое является изоморфизмом в категории $\mathfrak{Fol}$. Следовательно, для любых $x \in M$ и $y := f(x)$ существуют окрестности $U_k \ni x$ и $U'_s \ni y$ из ζ и ζ' соответственно и диффеоморфизм $\varphi: V_k \rightarrow V'_s$, где $V_k := f_k(U_k)$ и $V'_s := f'_s(U'_s)$ удовлетворяют соотношениям $f(U_k) = U'_s$ и $\varphi \circ f_k = f'_s \circ f|_{U_k}$. Далее мы будем использовать следующие обозначения: $P_k := P|_{V_k}$, $P'_s := P'|_{V'_s}$ и $p_k := p|_{P_k}$, $p'_s := p|_{P'_s}$.

Говорят, что f сохраняет трансверсальную картанову геометрию, если каждый такой диффеоморфизм $\varphi: V_k \rightarrow V'_s$ является изоморфизмом индуцированных картановых геометрий (V_k, ξ_{V_k}) и $(V'_s, \xi'_{V'_s})$, т.е. если существует изоморфизм $\Phi: P_k \rightarrow P'_s$ в категории Car , удовлетворяющий коммутативной диаграмме (рис. 1).

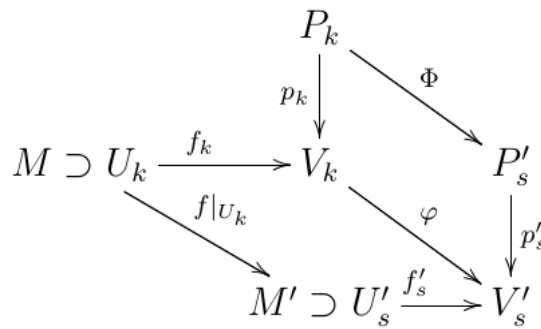


Рис. 1

Подчеркнем, что в силу эффективности трансверсальной картановой геометрии с данной проекцией φ существует единственный изоморфизм $\Phi: P_k \rightarrow P'_s$ в категории Car . Данное определение Φ корректно, т.е. не зависит от выбора окрестностей U_k и U'_s из ζ и ζ' .

Определение 3. Под морфизмом двух картановых слоений (M, F) и (M', F') понимается локальный диффеоморфизм $f: M \rightarrow M'$, отображающий слои в слои и сохраняющий трансверсальную картанову структуру. Категория $C\mathfrak{F}$, объектами в которой являются картановы слоения, а морфизмами – морфизмы картановых слоений, называется *категорией картановых слоений*.

3. Связность Эресмана для слоений

Слоения со связностью Эресмана. Р. А. Блюменталь и Дж. Дж. Хебда [14] ввели понятие связности Эресмана для слоения (M, F) как естественное обобщение связности Эресмана для субмерсий. Пусть (M, F) – слоение коразмерности q ; Q – гладкое q -мерное распределение на M , трансверсальное к слоению F . Кусочно-гладкие интегральные кривые распределения Q называются горизонтальными, а кусочно-гладкие кривые в слое называются вертикальными. Кусочно-гладкое отображение H квадрата

$I_1 \times I_2$ в M называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если кривая $H|_{\{s\} \times I_2}$ является *вертикальной* для любого $s \in I_1$ и кривая $H|_{I_1 \times \{t\}}$ является *горизонтальной* для любого $t \in I_2$. В этом случае пара путей $(H|_{I_1 \times \{0\}}; H|_{\{0\} \times I_2})$ называется базой H .

Известно, что существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с данной базой. Распределение Q называется *связностью Эресмана* для слоения (M, F) , если для любой пары путей (σ, h) в M с общей начальной точкой $\sigma(0) = h(0)$, где σ – горизонтальная кривая, а h – вертикальная кривая, существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h) .

Простое слоение со связностью Эресмана. Пусть $f: M \rightarrow N$ – субмерсия со связными слоями. Напомним, что слоение $F = \{p^{-1}(z), z \in N\}$, образованное слоями субмерсии, называется *простым слоением*. Пусть (M, F) – произвольное гладкое слоение связностью Эресмана. Если существует его накрытие $\hat{k}: \hat{M} \rightarrow M$ такое, что поднятое слоение $(\hat{M}, \hat{F})$ является простым, то слоение (M, F) накрыто расслоением.

4. Классы слоений, накрытых расслоениями

(X, G) -слоения со связностью Эресмана. Пусть X – гладкое связное многообразие, G – группа Ли диффеоморфизмов многообразия X . Напомним, что действие группы G на многообразии X называется *квазианалитическим*, если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и элемента $g \in G$ равенство $g|_U = id|_U$ влечет $g = e$, где e – тождественное преобразование в X .

Предположим, что группа диффеоморфизмов G многообразия X действует на N квазианалитически. Слоение (M, F) , заданное (N, ξ) -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, называется (X, G) -слоением, если для каждого $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$ существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{ij} = g|_{f_j(U_i \cap U_j)}$. Если, кроме того, (X, ξ) – картаново многообразие и группа G – подгруппа группы автоморфизмов $Aut(X, \xi)$, то (M, F) – картаново (X, G) -слоение. Из работы [7, раздел VI] следует, что картановы (X, G) -слоения со связностью Эресмана накрыты расслоениями.

Картановы слоения с нулевой трансверсальной кривизной. Картаново слоение (M, F) типа (G, H) , трансверсальная картанова кривизна которого равна нулю, является $(G, G/H)$ -слоением и, если слоение (M, F) имеет связность Эресмана, оно накрыто расслоением. Следовательно, все полученные результаты справедливы для картановых слоений с нулевой трансверсальной кривизной, допускающих связность Эресмана.

Конформные слоения коразмерности q , $q \geq 3$. Согласно [12, теорема 5] любое конформное слоение коразмерности q , $q \geq 3$, не являющееся

римановым слоением и обладающее связностью Эресмана, накрыто расслоением и поэтому входит в класс исследуемых слоений.

Слоения с интегрируемой связностью Эресмана. Напомним, что связность Эресмана Q для слоения (M, F) называется интегрируемой, если интегрируемо распределение Q . Слоения с интегрируемой связностью Эресмана накрыты расслоениями и входят в исследуемый нами класс слоений.

Надстроечные слоения. Конструкция надстроечного слоения предложена А. Хефлигером и подробно описана в [15]. Заметим, что надстроечные слоения образуют класс слоений с интегрируемой связностью Эресмана и накрыты расслоениями.

Картаново слоение коразмерности $q=1$. Любое гладкое одномерное распределение интегрируемо, поэтому картаново слоение (M, F) коразмерности 1, допускающие связность Эресмана, накрыто расслоением.

5. Доказательство основных теорем

Регулярные накрывающие отображения

Определение 4. Пусть $f: M \rightarrow B$ – субмерсия. Говорят, что $q, \hat{h} \in \text{Diff}(M)$, лежит над $h \in \text{Diff}(B)$ относительно f , если $h \circ f = f \circ \hat{h}$.

Пусть $\tilde{k}: \tilde{K} \rightarrow K$ – универсальное накрывающее отображение, где K и $\tilde{K}$ – гладкие многообразия. По аналогии с теоремой 28.10 из [16] нетрудно показать, что для любого $h \in \text{Diff}(K)$ существует диффеоморфизм $\tilde{h} \in \text{Diff}(\tilde{K})$, лежащий над h . Для произвольного накрывающего отображения аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Нетрудно доказать следующий критерий существования поднятий произвольных диффеоморфизмов относительно регулярных накрытий.

Предложение 1. Пусть $\hat{k}: \hat{K} \rightarrow K$ – гладкое регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Γ . Диффеоморфизм $\hat{h} \in \text{Diff}(\hat{K})$ лежит над некоторым диффеоморфизмом $h \in \text{Diff}(K)$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет равенству $\Gamma \circ \hat{h} = \hat{h} \circ \Gamma$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что (M, F) – картаново слоение, моделируемое на эффективной картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$, накрыто расслоением $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, и $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрытие. Расслоение $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$ имеет связные слои и односвязное многообразие $\tilde{M}$. Применяя точную гомотопическую последовательность для этого расслоения, мы получаем, что его базовое многообразие B также односвязно.

Для произвольной точки $b \in B$ рассмотрим $y \in \tilde{r}^{-1}(b)$ и $x = \tilde{k}(y)$. Не нарушая общности, считаем, что существует окрестность U_i , $x \in U_i$, из (N, ξ) -коцикла $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, задающего слоение (M, F) , и окрестность $\tilde{U}_i$, $y \in \tilde{U}_i$, такая, что $\tilde{k}|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ – диффеоморфизм.

Пусть $\tilde{V}_i := \tilde{r}(\tilde{U}_i)$. Тогда определен диффеоморфизм $\phi: \tilde{V}_i \rightarrow V_i$, удовлетворяющий равенству $\phi \circ \tilde{r}|_{\tilde{U}_i} = f_i \circ \tilde{k}|_{\tilde{U}_i}$. Подчеркнем, что диффеоморфизм ϕ индуцированной картановой геометрии $\eta_{\tilde{V}_i}$ на $\tilde{V}_i$ будет также изоморфизмом $(\tilde{V}_i, \eta_{\tilde{V}_i})$ и (V_i, ξ_{V_i}) в категории картановых геометрий $\mathcal{Cat}$. Прямая проверка показывает, что определенная на B геометрия η является картановой, причем $\eta|_{\tilde{V}_i} = \eta_{\tilde{V}_i}, i \in J$. Таким образом, утверждение (1) доказано.

Зафиксируем точки $x_0 \in M$ и $y_0 \in \tilde{k}^{-1}(x_0) \in \tilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\tilde{M}$ как группа накрывающих преобразований $\tilde{G} \cong \pi_1(M, x_0)$ накрытия $\tilde{k}$. Так как $\tilde{G}$ сохраняет индуцированное слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, образованное слоями расслоения $\tilde{r}: \tilde{M} \rightarrow B$, то каждое преобразование $\tilde{\psi} \in \tilde{G}$ определяет диффеоморфизм $\phi \in \text{Diff}(B)$ многообразия B , удовлетворяющий равенству $\tilde{r} \circ \tilde{\psi} = \phi \circ \tilde{r}$. Отображение $\chi: \tilde{G} \rightarrow \Psi: \tilde{\psi} \mapsto \phi$ – эпиморфизм групп и утверждение (2) доказано.

Заметим, что $\tilde{G}$ – подгруппа группы автоморфизмов $A(\tilde{M}, \tilde{F})$ слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ в категории $\mathcal{CF}$. Следовательно Ψ – подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut}(B, \eta)$ в категории картановых геометрий $\mathcal{Cat}$. Ядро $\ker(\chi)$ отображения χ определяет фактор-многообразие $\hat{M} := \tilde{M} / \ker(\chi)$ с фактор-отображением $\hat{k}: \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ и фактор-группой $\hat{G} := \tilde{G} / \ker(\chi)$ такой, что $M \cong \hat{M} / \hat{G}$. Фактор-отображение $k: \hat{M} \rightarrow M$ – регулярное накрывающее отображение, причем $\hat{G}$ действует на $\hat{M}$ как группа накрывающих преобразований. Отображение $\theta: \hat{G} \rightarrow \Psi: \tilde{\psi} \cdot \ker(\chi) \mapsto \chi(\tilde{\psi}), \tilde{\psi} \in \tilde{G}$, – изоморфизм групп, (3) доказано. ■

Слоеное расслоение. Пусть (M, F) – картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии $\xi = (P(N, H), \omega)$ типа (G, H) . Тогда определено главное H -расслоение с проекцией $\pi: \mathfrak{R} \rightarrow M$, H -инвариантное слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ и $\mathfrak{g}$ -значная H -эквивариантная 1-форма β на $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $\beta(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$;
- (ii) отображение $\beta_u: T_u \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{R}$, сюръективно, причем $\ker(\beta_u) = T_u \mathfrak{S}$;
- (iii) слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ – трансверсально параллелизуемое;
- (iv) $L_X \beta = 0$ для каждого векторного поля X , касательного к слоению $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$.

Главное H -расслоение $\mathfrak{R}(M, H)$ называется *слоеным расслоением*, а слоение $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ *поднятым слоением* для картанова слоения (M, F) .

Если поднятое слоение $(\mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ образовано слоями локально тривиального расслоения $\pi_b : \mathfrak{X} \rightarrow W$, то $W = \mathfrak{X} / \mathfrak{S}$ – гладкое многообразие, на котором индуцированы $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма $\tilde{\beta}$, причем $\pi_b^* \tilde{\beta} := \beta$, и локально свободное действие группы Ли H на W . При этом $(W, \tilde{\beta})$ – параллелизуемое многообразие и $A(W, \tilde{\beta})$ – группа Ли его автоморфизмов, свободно действующая на W . Далее, через $A^H(W, \tilde{\beta})$ обозначается замкнутая подгруппа Ли группы Ли $A(W, \tilde{\beta})$, образованная преобразованиями, коммутирующими с индуцированным действием группы Ли H на W .

Доказательство теоремы 2. Предположим, что картаново слоение (M, F) накрыто расслоением. Тогда, слоение $(\tilde{M}, \tilde{F})$, индуцированное на пространстве универсального накрывающего отображения $\tilde{k} : \tilde{M} \rightarrow M$, определено слоями локально тривиального расслоения $\tilde{r} : \tilde{M} \rightarrow B$. Благодаря теореме 1 определены регулярное накрывающее отображение $k : \hat{M} \rightarrow M$ и локально тривиальное расслоение $r : \hat{M} \rightarrow B$, причем B – односвязное многообразие с индуцированной картановой геометрией η . Пусть Ψ – глобальная группа голономии слоения (M, F) , тогда Ψ изоморфна группе накрывающих преобразований G накрытия $k : \hat{M} \rightarrow M$. Так как многообразие $\tilde{M}$ односвязно, то существует универсальное накрывающее отображение $\hat{k} : \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$, удовлетворяющее равенству $k \circ \hat{k} = \tilde{k}$. Пусть $\tilde{G}$, G и $\hat{G}$ – группы накрывающих преобразований для накрывающих отображений $\tilde{k}$, k и $\hat{k}$ соответственно, причем $\Psi \cong G \cong \tilde{G} / \hat{G}$.

Рассмотрим следующие прообразы H -расслоения $\mathfrak{X}$ относительно $\tilde{k}$ и k :

$$\tilde{\mathfrak{X}} := \{(\tilde{x}, u) \in \tilde{M} \times \mathfrak{X} \mid \tilde{k}(\tilde{x}) = \pi(u)\} = \tilde{k}^* \mathfrak{X} \text{ и}$$

$$\hat{\mathfrak{X}} := \{(\hat{x}, u) \in \hat{M} \times \mathfrak{X} \mid k(\hat{x}) = \pi(u)\} = k^* \mathfrak{X}.$$

Заметим, что

$$\tilde{\theta} := \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X} : (\tilde{x}, u) \mapsto (\tilde{k}(\tilde{x}), u) \quad \forall (\tilde{x}, u) \in \tilde{\mathfrak{X}},$$

$$\theta := \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X} : (\hat{x}, u) \mapsto (k(\hat{x}), u) \quad \forall (\hat{x}, u) \in \hat{\mathfrak{X}},$$

$$\hat{\theta} := \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{\mathfrak{X}} : (\tilde{x}, u) \mapsto (\hat{k}(\tilde{x}), u) \quad \forall (\tilde{x}, u) \in \tilde{\mathfrak{X}} -$$

регулярные накрывающие отображения с группами накрывающих преобразований $\tilde{G}$, G и $\hat{G}$ соответственно. Более того, $\tilde{\Gamma} \cong \tilde{G}$, $\Gamma \cong G$ и $\hat{\Gamma} \cong \hat{G}$.

Пусть $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}})$ и $(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}})$ соответствующие поднятые слоения. Так как $(\tilde{M}, \tilde{F})$ и $(\hat{M}, \hat{F})$ являются простыми слоениями, то $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}})$ и $(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}})$ также простые слоения, которые образованы локально тривиальными расслоениями $\tilde{\pi}_b : \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \tilde{W}$ и $\hat{\pi}_b : \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{W}$. Следовательно, $g_0(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{S}}) = 0$, $g_0(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{S}}) = 0$ и $\tilde{W} = \tilde{\mathfrak{X}} / \tilde{\mathfrak{S}}$, $\hat{W} = \hat{\mathfrak{X}} / \hat{\mathfrak{S}}$ – гладкие многообразия. Так как расслоения $\tilde{r} : \tilde{M} \rightarrow B$

и $r: \hat{M} \rightarrow B$ имеют одинаковую базу B , то каждый слой слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ инвариантен относительно действия группы $\hat{G}$, т.е. $\hat{G} \subset A_L(\tilde{M}, \tilde{F})$. Поэтому $\hat{G} \subset A_L(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}})$ и пространства слоев $\hat{\mathfrak{X}}/\hat{\mathfrak{Z}} = \tilde{W}$ и $\hat{\mathfrak{X}}/\hat{\mathfrak{Z}} = \hat{W}$ совпадают, т.е. $\tilde{W} = \hat{W}$. Следовательно, группы базовых автоморфизмов $A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}})$ и $A_B(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}})$ могут быть отождествлены, т.е. $A_B(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}}) = A_B(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}})$.

Согласно условиям доказываемой теоремы Ψ – дискретная подгруппа группы Ли $Aut(B, \eta)$. Пусть $N(\Psi)$ – нормализатор Ψ в группе Ли $Aut(B, \eta)$. Тогда $N(\Psi)$ – замкнутая подгруппа Ли группы Ли $Aut(B, \eta)$, фактор-группа $N(\Psi)/\Psi$ также является группой Ли.

Пусть $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow M$ – проекция слоеного расслоения над (M, F) . Благодаря дискретности глобальной группы голономии Ψ в группе Ли $Aut(B, \eta)$ поднятое слоение $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{Z}})$ образовано слоями некоторого локально тривиального расслоения $\pi_b: \mathfrak{X} \rightarrow W$, которое называется базовым. Подчеркнем, что существует отображение $\tau: \hat{W} \rightarrow W$, удовлетворяющее равенству $\tau \circ \hat{\pi}_b = \theta \circ \pi_b$. Непосредственная проверка показывает, что $\tau: \hat{W} \rightarrow W$ – регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Φ , $\Phi \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta})$, причем Φ естественным образом изоморфна группам Ψ , G и Γ .

Обозначим через $\eta = (P(B, H), \omega)$ картанову геометрию с проекцией $p: P \rightarrow B$ на B , определенную в доказательстве теоремы 1. Заметим, что $\hat{W} = P$ – пространство главного H -расслоения для картановой геометрии η . Так как $k: \hat{M} \rightarrow M$, $\theta: \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ и $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow M$ – морфизмы следующих слоений $k: (\hat{M}, \hat{F}) \rightarrow (M, F)$, $\theta: (\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Z}}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ и $\pi: (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \rightarrow (M, \mathfrak{Z})$ в категории слоений $\mathfrak{S}^{ol}$, то определены отображения $\hat{\tau}: B \rightarrow M/F$ и $s: W \rightarrow W/H \cong M/F$, причем коммутативна диаграмма (рис. 2).

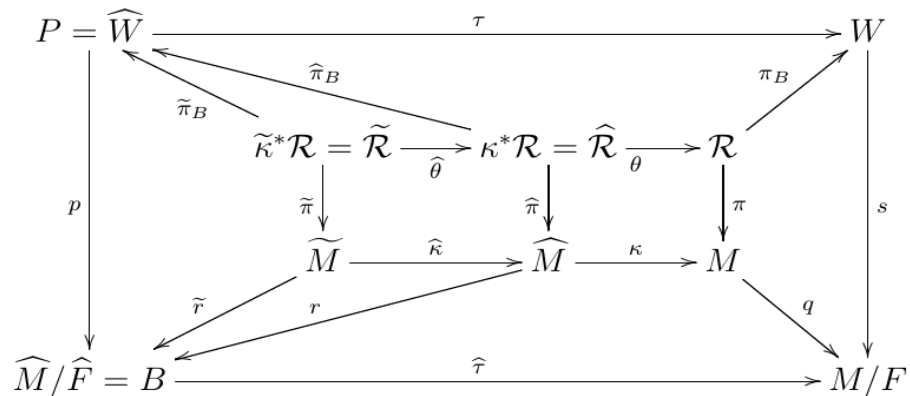


Рис. 2

Как доказано в [13, теорема 1], существуют изоморфизмы групп Ли:

$$\varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta}) \text{ и}$$

$$\hat{\varepsilon}: A_B(\tilde{M}, \tilde{F}) \cong A_B(\hat{M}, \hat{F}) \rightarrow im(\hat{\varepsilon}) \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta}).$$

Определим отображение $\Theta: im(\varepsilon) \rightarrow N(\Phi)/\Phi$ следующим образом. Возьмем произвольный элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta})$. Обозначим элемент $h \in im(\varepsilon) \subset A^H(W, \tilde{\beta})$ через $f \cdot A_L(M, F) \in A_B(M, F)$, где $f \in A(M, F)$. Так как $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрывающее отображение, то существует диффеоморфизм $\tilde{f} \in Diff(\tilde{M})$, лежащий над f относительно. Заметим, что $\tilde{f} \in A(\tilde{M}, \tilde{F})$, тогда $\tilde{f} \cdot A_L(\tilde{M}, \tilde{F}) \in A_B(\tilde{M}, \tilde{F})$. Рассмотрим $\hat{h} := \hat{\varepsilon}(\tilde{f} \cdot A_L(\tilde{M}, \tilde{F})) \in im(\hat{\varepsilon}) \subset A^H(\hat{W}, \hat{\beta})$. Прямая проверка показывает, что $\hat{h}$ лежит над h относительно τ . Напомним, что Φ – группа накрывающих преобразований накрытия $\tau: \hat{W} \rightarrow W$. Применяя предложение 1, мы получаем, что $\hat{h} \in N(\Phi)$ и множество всех автоморфизмов $im(\hat{\varepsilon})$, лежащих над h , равно множеству всех преобразований из класса $\hat{h} \cdot \Phi$. Положим $\Theta(h) := \hat{h} \cdot \Phi \in N(\Phi)/\Phi$. Проверка показывает, что отображение $\Theta: im(\varepsilon) \rightarrow N(\Phi)/\Phi$ – мономорфизм групп.

Эффективность картановой геометрии $\eta = (P(B, H), \omega)$ на B , где $P = \hat{W}$, влечет существование изоморфизма групп Ли $\sigma: A^H(\hat{W}, \hat{\beta}) \rightarrow Aut(B, \eta)$. Заметим, что $\sigma(\Phi) = \Psi$ и $\sigma(N(\Phi)) = N(\Psi)$, следовательно, существует индуцированный изоморфизм групп Ли $\tilde{\sigma}: N(\Phi)/\Phi \rightarrow N(\Psi)/\Psi$. Тогда композиция мономорфизмов групп Ли

$$\delta := \tilde{\sigma} \circ \Theta \circ \varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow N(\Psi)/\Psi$$

является требуемым мономорфизмом групп Ли. Благодаря единственности структуры группы Ли в группе базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ и [13, теорема 1] образ $im(\delta)$ является открыто-замкнутой подгруппой фактор-группы $N(\Psi)/\Psi$. ■

Доказательство теоремы 3.

1. Согласно условиям доказываемой теоремы 3 (M, F) является Q -полным картановым слоением, причем распределение Q интегрируемо. В этом случае существует q -мерное слоение (M, F^t) такое, что $TF^t = Q$. Пусть $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$ – универсальное накрывающее отображение. Из [15, предложение 2] известно, что в этом случае Q является интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F) .

Согласно теореме о разложении Касивабары [17] универсальное накрывающее многообразие равно произведению многообразий $\tilde{M} = \tilde{Q} \times B$, где $\tilde{Q}$ – универсальное накрывающее многообразие для любого слоя слоения (M, F) , а B – универсальное накрывающее многообразие для любого слоя слоения (M, F^t) . Определены индуцированные слоения $\tilde{F} := \tilde{k}^* F =$

$= \{\tilde{Q} \times \{y\} \mid y \in B\}$, $\tilde{F}^t := \tilde{k}^* F^t = \{\{z\} \times B \mid z \in \tilde{Q}\}$, следовательно, (M, F) накрыто расслоением $\tilde{s}: \tilde{Q} \times B \rightarrow \tilde{Q}$. Так же как и в доказательстве теоремы 1, на многообразии B индуцируется картанова геометрия η такая, что (M, F) становится $(Aut(B, \eta), B)$ -слоением.

2. Пусть Ψ – глобальная группа голономии этого слоения. Предположим, что нормализатор $N(\Psi)$ равен централизатору $Z(\Psi)$ группы Ψ в группе $(Aut(B, \eta), B)$. Так как слоение (M, F^t) накрыто расслоением $\tilde{s}: \tilde{Q} \times B \rightarrow \tilde{Q}$, то для него определена глобальная группа голономии Ψ^t .

Зафиксируем точки $x_0 \in M$ и $(z_0, y_0) \in \tilde{k}^{-1}(x_0) \in \tilde{M}$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M, x)$ действует на универсальном накрывающем пространстве $\tilde{M} = \tilde{Q} \times B$ как группа накрывающих преобразований $\tilde{G} \cong \pi_1(M, x)$ накрытия $\tilde{k}$. Так как $\tilde{G}$ сохраняет оба индуцированных слоения $(\tilde{M}, \tilde{F})$ и $(\tilde{M}, \tilde{F}^t)$, то каждый элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}$ может быть записан в виде $\tilde{g} = (\psi^t, \psi)$, где ψ^t – преобразование из подгруппы Ψ^t в $Diff(\tilde{Q})$, $\psi \in \Psi$, причем $\tilde{g}(z, y) = (\psi^t(z), \psi(y))$, $(z, y) \in \tilde{Q} \times B$. Отображения $\tilde{\chi}: \tilde{G} \rightarrow \Psi: \tilde{g} = (\psi^t, \psi) \mapsto \psi$ и $\tilde{\chi}^t: \tilde{G} \rightarrow \Psi^t: \tilde{g} = (\psi^t, \psi) \mapsto \psi^t$ являются эпиморфизмами указанных групп. Пусть h – любой элемент из класса смежности $h \circ \Psi \in N(\Psi)$. Так как $N(\Psi) = Z(\Psi)$, то мы получаем следующую цепочку равенств

$$\tilde{g} \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (\psi^t, \psi) \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (\psi^t \circ id_{\tilde{Q}}, \psi \circ h) =$$

$$(id_{\tilde{Q}} \circ \psi^t, h \circ \psi) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ (\psi^t, \psi) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ \tilde{g}$$

для любого $\tilde{g} = (\psi^t, \psi) \in \tilde{G}$, т.е. $\tilde{G} \circ (id_{\tilde{Q}}, h) = (id_{\tilde{Q}}, h) \circ \tilde{G}$. Следовательно, согласно предложению 1 диффеоморфизм $\tilde{h}$ проектируется на M , т.е. существует такое преобразование $\tilde{h} \in Diff(\tilde{M})$, что $(id_{\tilde{Q}}, h)$ лежит над $\tilde{h}$ относительно универсального накрытия $\tilde{k}: \tilde{M} \rightarrow M$. Используя принадлежность $(id_{\tilde{Q}}, h) \in A(\tilde{M}, \tilde{F})$, нетрудно проверить, что $\tilde{h} \in A(M, F)$. Следовательно, отображение $\varepsilon: A_B(M, F) \rightarrow N(\Psi)/\Psi$, заданное равенством $\varepsilon(\tilde{h} \cdot A_L(M, F)) = h$, является сюръективно. Таким образом, ε – изоморфизм групп Ли. ■

6. Пример вычисления группы базовых автоморфизмов

Пусть S^q – q -мерная стандартная сфера, где $q \geq 3$. отождествим S^q с $R^q \cup \{\infty\}$, где $\{\infty\}$ – бесконечно удаленная точка. Определим преобразование $\psi: S^q \rightarrow S^q$ равенством $\psi(z) = \lambda z$ для любого $z \in S^q \cong R^q \cup \{\infty\}$, где λ –

действительное число, причем $0 < \lambda < 1$. Обозначим через $Conf(S^q)$ группу Ли всех конформных преобразований сферы S^q . Пусть $\Psi = \langle \psi \rangle$, подгруппа группы $Conf(S^q)$, порожденная преобразованием ψ , и изоморфная Z . Определим действие группы целых чисел Z на произведении $R^1 \times S^q$ равенством $n(t, z) = (t - n, \psi^n(z))$ для любых $n \in Z$, $(t, z) \in R^1 \times S^q$. Это действие свободное и собственно разрывное, поэтому определено многообразие орбит $M = R^1 \times_Z S^q$ и фактор-отображение $f: R^1 \times S^q \rightarrow M$. Так как указанное действие сохраняет структуру произведения $R^1 \times S^q$, то определены два слоения (M, F) и (M, F^t) , накрытые тривиальными расслоениями $pr_2: R^1 \times S^q \rightarrow S^q$ и $pr_1: R^1 \times S^q \rightarrow R^1$ соответственно. Обозначим через $\chi: R^1 \rightarrow S^1$ и $\nu: S^q \rightarrow S^q / \Psi$ проекции на пространство орбит, а через $r: M \rightarrow M / F$ – проекцию на пространство слоев слоения (M, F) . Наблюдения показывают, что топологические пространства M / F и S^q / Ψ гомеоморфны и удовлетворяют коммутативной диаграмме (рис. 3), где $p: M \rightarrow S^1$ – проекция локально тривиального расслоения, образованного слоями (M, F^t) . Так как многообразие M является пространством локально тривиального расслоения над окружностью S^1 с компактным стандартным слоем S^q , то M – компактно.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^1 & \xleftarrow{pr_1} & \mathbb{R}^1 \times S^q & \xrightarrow{pr_2} & S^q \\
 \chi \downarrow & & f \downarrow & & \nu \downarrow \\
 S^1 & \xleftarrow{p} & M & \xrightarrow{r} & S^q / \Psi \cong M / F
 \end{array}$$

Рис. 3

Распределение Q , касательное к слоям слоения (M, F^t) , является интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F) . Слоение (M, F) имеет два компактных слоя L_1 и L_2 , диффеоморфные окружности, любой другой слой L диффеоморфен прямой, а его замыкание равно объединению $L \cup L_1 \cup L_2$. Подчеркнем, что (M, F) – конформное слоение, которое можно рассматривать как картаново типа (G, H) , где $G = Conf(S^q)$, а H – стационарная подгруппа группы $Conf(S^q)$ в некоторой точке из S^q . Как известно, $H \cong CO(q) \ltimes R^q$ – полупрямое произведение конформной группы $CO(q) = R^+ \times O(q)$ и нормальной абелевой подгруппы R^q . Заметим, что Ψ – глобальная группа голономии слоения (M, F) , причем Ψ – дискретная подгруппа группы Ли $Conf(S^q)$.

Нетрудно проверить, что нормализатор группы Ψ равен $N(\Psi) = R^+ \times O(q)$ и совпадает с централизатором $Z(\Psi)$. Применяя теорему 3, мы получаем, что группа базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ является группой Ли, изоморфной фактор-группе $N(\Psi)/\Psi \cong U(1) \times O(q)$, где $U(1) \cong S^1$. Таким образом, группа Ли базовых автоморфизмов $A_B(M, F)$ изоморфна произведению групп Ли $U(1) \times O(q)$.

Список литературы

1. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1995. – 384 с.
2. Склярченко Е. Г. К пятой проблеме Гильберта // Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. М. : Наука, 1969. С. 101–115.
3. Chu H., Kobayashi S. The automorphism group of a geometric structure // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. № 113. P. 141–150.
4. Cap A., Slovak J. Parabolic Geometries. I. Background and General Theory // Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society. Providence, RI, 2009.
5. Sharpe R. W. Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Graduate Texts in Mathematics. New York ; Springer-Verlag, 1997.
6. Crampin M., Saunders D. Cartan Geometries and their Symmetries, A Lie Algebroid Approach // ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry. 2016. Vol. 4.
7. Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. Chaos in Cartan foliations // Chaos. 2020. Vol. 30. P. 1–9.
8. Pecastaing V. On two theorems about local automorphisms of geometric structures // Ann. Int. Fourier, Grenoble. 2016. № 66 (1). P. 175–208.
9. Cap A., Caperl A., Gover A. R. and Hamm M. Holonomy reductions of Cartan geometries and curved orbit decompositions // Duke Math. J. 2014. Vol. 163. P. 1035–1070.
10. Jennen H. Cartan geometry of spacetimes with a nonconstant cosmological function Λ // arXiv:1406.2621v2[gr-qc]. Physics. REV. D 90, 084046. 2014.
11. Белько И. В. Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением // Математический сборник. 1982. Т. 117, № 2. С. 181–195.
12. Zhukova N. I. Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys. 2009. № 2. P. 14–35.
13. Sheina K. I., Zhukova N. I. The Groups of Basic Automorphisms of Complete Cartan Foliations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 271–280.
14. Blumenthal R. A., Hebda J. J. Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, № 4. P. 597–611.
15. Жукова Н. И. Минимальные множества картановых слоений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 105–135.
16. Busemann H. The geometry of geodesics. N. Y. : Academic Press, 2011.
17. Kashiwabara S. The decomposition of differential manifolds and its applications // Tohoku Math. J. 1959. № 11. P. 43–53.

References

1. Kobayasi Sh. *Gruppy preobrazovaniy v differentsial'noy geometrii = Transformation groups in differential geometry*. Moscow: Nauka, 1995:384. (In Russ.)
2. Sklyarenko E.G. To Hilbert's fifth problem. *Problemy Gil'berta = Hilbert's problems*. Moscow: Nauka, 1969:101–115. (In Russ.)

3. Chu H., Kobayashi S. The automorphism group of a geometric structure. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1964;113:141–150.
4. Cap A., Slovak J. Parabolic Geometries. I. Background and General Theory. *Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society.* Providence, RI, 2009.
5. Sharpe R.W. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Graduate Texts in Mathematics.* New York; Springer-Verlag, 1997.
6. Crampin M., Saunders D. Cartan Geometries and their Symmetries, A Lie Algebroid Approach. *ATLANTIS Press Atlantis Studies in Variational Geometry.* 2016;4.
7. Bazaikin Y.V., Galaev A.S., Zhukova N. Chaos in Cartan foliations. *Chaos.* 2020;30: 1–9.
8. Pecastaing V. On two theorems about local automorphisms of geometric structures. *Ann. Int. Fourier, Grenoble.* 2016;66(1):175–208.
9. Cap A., Capel A., Gover A.R. and Hamm M. Holonomy reductions of Cartan geometries and curved orbit decompositions. *Duke Math. J.* 2014;163:1035–1070.
10. Jennen H. Cartan geometry of spacetimes with a nonconstant cosmological function A. arXiv:1406.2621v2[gr-qc]. *Physics. REV. D* 90, 084046. 2014.
11. Bel'ko I.V. Affine transformations of a transverse projected connection on a foliated manifold. *Matematicheskiy sbornik = Collected articles of mathematics.* 1982;117(2):181–195. (In Russ.)
12. Zhukova N.I. Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Math. Information Sci. Phys.* 2009;2:14–35.
13. Sheina K.I., Zhukova N.I. The Groups of Basic Automorphisms of Complete Cartan Foliations. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2018;39(2):271–280.
14. Blumenthal R.A., Hebda J.J. Ehresmann connections for foliations. *Indiana Univ. Math. J.* 1984;33(4):597–611.
15. Zhukova N.I. Minimal puffed Cartan sets. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova = Proceedings of Steklov Mathematical Institute.* 2007;256:105–135. (In Russ.)
16. Busemann H. *The geometry of geodesics.* New York: Academic Press, 2011.
17. Kashiwabara S. The decomposition of differential manifolds and its applications. *Tohoku Math. J.* 1959;11:43–53.

Информация об авторах / Information about the authors

Ксения Игоревна Шеина

аспирант, Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
(Россия, г. Нижний Новгород,
ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: ksheina@hse.ru

Kseniya I. Sheina

Postgraduate student, National Research
University “Higher School of Economics”
(25/12 Bolshaya Pecherskaya street,
Nizhny Novgorod, Russia)

Поступила в редакцию / Received 02.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 18.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020

УДК 517.392

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов

И. В. Бойков¹, П. В. Айкашев²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹boikov@pnzgu.ru, ²math@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Гиперсингулярные интегралы в настоящее время находят все больше областей применения – аэродинамика, теория упругости, электродинамика и геофизика. При этом их вычисление в аналитическом виде возможно лишь в весьма частных случаях. Поэтому приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов являются актуальной задачей вычислительной математики. Этой задаче посвящено много работ. Еще большее число работ посвящено приближенным методам вычисления сингулярных интегралов. Исследования приближенных методов вычисления сингулярных интегралов начаты значительно раньше, чем аналогичные исследования гиперсингулярных интегралов. И в этом направлении получены результаты, не имеющие аналогов для гиперсингулярных интегралов. Представляет значительный интерес распространение методов вычисления сингулярных интегралов на гиперсингулярные интегралы, основанное на связи между некоторыми классами сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Этой задаче посвящена данная работа. *Материалы и методы.* Построение квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов основано на методах конструктивной теории функций и теории сингулярных и гиперсингулярных интегралов. *Результаты.* Предложен метод построения квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов, основанный на трансформации квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов. Построены квадратурные формулы вычисления нескольких классов гиперсингулярных и полигиперсингулярных интегралов. Получены оценки погрешности построенных квадратурных формул. *Выводы.* Построенные методы позволяют эффективно вычислять гиперсингулярные интегралы при решении прикладных задач.

Ключевые слова: квадратурные формулы, кубатурные формулы, гиперсингулярные интегралы

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00594) и «Ректорского гранта» Пензенского государственного университета (договор № 1/РГ от 08.04.2020).

Для цитирования: Бойков И. В., Айкашев П. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 66–84. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Approximate methods for calculating hypersingular integrals

I.V. Boykov¹, P.V. Aykashev²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹boikov@pnzgu.ru, ²math@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* Hypersingular integrals are now finding more and more fields of application – aerodynamics, elasticity theory, electrodynamics and geophysics. Moreover,

their calculation in an analytical form is possible only in very special cases. Therefore, approximate methods for calculating hypersingular integrals are an urgent problem in computational mathematics. Many works have been devoted to this problem. An even greater number of works are devoted to approximate methods for calculating singular integrals. Studies of approximate methods for calculating singular integrals began much earlier than similar studies of hypersingular integrals. In this direction, results have been obtained that have no analogues for hypersingular integrals. This work is devoted to considerable interest to extend the methods for calculating singular integrals to hypersingular integrals, based on the connection between some classes of singular and hypersingular integrals. *Materials and methods.* The construction of quadrature formulas for calculating hypersingular integrals is based on the methods of the constructive theory of functions and the theory of singular and hypersingular integrals. *Results.* A method is proposed for constructing quadrature formulas for calculating hypersingular integrals, based on the transformation of quadrature formulas for calculating singular integrals. Quadrature formulas for calculating several classes of hypersingular and polyhypersingular integrals are constructed. The estimates of the error of the constructed quadrature formulas are obtained. *Conclusions.* The constructed methods make it possible to efficiently calculate hypersingular integrals when solving applied problems.

Keywords: quadrature formulas, cubature formulas, hypersingular integrals

Acknowledgments: the work is supported by the RFBR (grant 16-01-00594) and “Rector’s grant” of Penza State University (contract No 1/RG from April 8, 2020).

For citation: Boykov I.V., Aykashev P.V. Approximate methods for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;1(57):66–84. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-6

Начиная с середины прошлого века методы сингулярных, а затем и гиперсингулярных, интегральных уравнений находят все большее применение при исследовании и моделировании различных проблем в физике, естествознании и технологиях: в аэродинамике, электродинамике, теории упругости, ядерной и атомной физике, геофизике, математической физике. Аналитические методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений известны только для очень частных случаев. Поэтому основным математическим аппаратом при решении сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений являются численные методы. Для реализации численных методов решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений необходимы эффективные приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

В свою очередь сингулярные и гиперсингулярные интегралы в аналитическом виде вычисляются в очень редких случаях. Это обуславливает необходимость развития численных методов вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

В настоящее время методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов можно разделить на два направления: вычисление интегралов с фиксированными особенностями и вычисление интегралов с нефиксированными (переменными) особенностями.

В свою очередь во втором направлении выделяются методы построения квадратурных формул типа Гаусса.

Вопросам вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов посвящено большое число работ, обзоры которых представлены в монографиях [1–6] и в статьях [7–21].

Данная работа посвящена методам трансформирования квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов (СИ) в квадратурные формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов (ГИ).

Статья построена следующим образом. В разд. 1 описаны классы функций, используемые в работе. В разд. 2 приведены определения ГИ. В разд. 3 даны определения оптимальных методов вычисления ГИ. В разд. 4 дан краткий обзор работ, посвященных приближенным методам вычисления ГИ. Раздел 5 посвящен построению квадратурных формул вычисления ГИ, полученных трансформациями квадратурных формул вычисления СИ.

1. Классы функций

Пусть γ – единичная окружность с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной. Пусть $A=[a,b]$ или $A=\gamma$.

Определение 1.1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M; A)$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству

$$|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha.$$

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; A)$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 1.2. Класс $W^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A , непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 1.3. Класс $W^r H_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Пусть $A=[a,b]$ или $A=\gamma$. Пусть $f(x)$ – функция, определенная на A . Через $H(f, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначен функционал

$$H(f, \alpha) = \sup_{x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in A} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}.$$

Пусть $L = \gamma_1 \times \gamma_2$, $\gamma_i = \{z_i \in Z_i : |z_i| = 1\}$, $i = 1, 2$, где Z_i – плоскость комплексной переменной, $i = 1, 2$. Пусть $D = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ или $D = L$.

Определение 1.4. Через $H_{\alpha_1 \alpha_2}(M, D)$ обозначен класс определенных на D функций $f(x, y)$ таких, что для любых точек (x', y') и (x'', y'') из D

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq M_1 |x' - x''|^{\alpha_1} + M_2 |y' - y''|^{\alpha_2}.$$

Здесь $M = \max(M_1, M_2)$.

Определение 1.5. Через $W^{r_1, r_2}(M, D), 0 < M < \infty$, обозначен класс определенных на D функций $f(x_1, x_2)$, имеющих частные производные $f^{(v_1, v_2)}(x_1, x_2) = \partial^{v_1+v_2} f(x_1, x_2) / \partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}$ ($0 \leq v_i \leq r_i, i = 1, 2$), причем

$$\|f^{(r_1, r_2)}(x_1, x_2)\|_{C(D)} \leq M, \quad \|f^{(r_1, j)}(x_1, 0)\|_{C(D)} \leq M, \quad j = 0, 1, \dots, r_2 - 1,$$

$$\|f^{(i, r_2)}(0, x_2)\|_{C(D)} \leq M, \quad i = 0, 1, \dots, r_1 - 1.$$

Определение 1.6. Через $W^{r_1, r_2}H_{\alpha_1, \alpha_2}(M, A, D), 0 < M, A < \infty$, обозначен класс функций $f(x_1, x_2) \in W^{r_1, r_2}(M, D)$, частные производные которых $f^{(v_1, v_2)}(x_1, x_2) = \partial^{v_1+v_2} f(x_1, x_2) / \partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2}$ ($0 \leq v_i \leq r_i, i = 1, 2$) удовлетворяют дополнительному условию Гельдера $H_{\alpha_1, \alpha_2}(A, D)$.

Определение 1.7. Через $\tilde{W}^r(M; (a, b))$ ($\tilde{W}_p^r(M; (a, b))$) обозначается класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r(M; (a, b))$ ($W_p^r(a, b)$).

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Определение 2.1 [22, 23]. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}}$ при натуральном p и вещественном α ($0 < \alpha < 1$) определяет величину (конечную часть) рассматриваемого интеграла: как предел при $x \rightarrow b$ суммы $\int_a^x \frac{A(\tau) d\tau}{(b - \tau)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b - x)^{p+\alpha-1}}$, если предположить, что функция $A(t)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x = b$.

Определение 2.2 [24]. Пусть $\varphi(t) \in W^{p-1}H_\alpha(M)$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}$, $a < c < b, p = 2, 3, \dots$, в смысле главного значения Коши – Адамара называется предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ – любая функция, на которую налагаются два условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) функция $\xi(v)$ имеет непрерывную производную $(p-1)$ -го порядка в окрестности нуля.

Определение 2.3. Интегралом $\int_a^b \frac{\phi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\phi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\phi(\tau)d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка в окрестности нуля; $\xi_1(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини – Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

Рассмотрим интеграл

$$L\phi \equiv \iint_G \frac{\phi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2 + (\tau_2-t_2)^2)^{p/2}},$$

где (t_1, t_2) – точка области G ; p ($p > 2$) – натуральное число.

Пусть $R(t, \epsilon)$, $t = (t_1, t_2)$, – круг с центром в точке t и с радиусом ϵ .

Определение 2.4 [3]. Регуляризацией интеграла $L\phi$ при $p \geq 3$ называется предел

$$L\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\iint_{G \setminus R(t, \epsilon)} \frac{\phi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2 + (\tau_2-t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\epsilon)}{\epsilon^{p-2}} - C(\epsilon) \ln \epsilon \right),$$

где $B(x)$, $C(x)$ – любые функции, на которые налагаются следующие условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x)$ имеет непрерывные производные до $(p-2)$ -го порядка в окрестности нуля;
- в) функция $C(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица.

Рассмотрим интеграл

$$H(f, \gamma) \equiv \iint_{R_2} \frac{f(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)} dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где уравнение $\gamma(t_1, t_2) = 0$ определяет функцию особенностей, а контур γ определяется уравнением $\gamma(t_1, t_2) = 0$. Пусть ϵ – произвольное малое число.

Обозначим через Γ_ϵ область с границей Γ_ϵ , состоящую из точек, расстояние от которых до контура γ не превосходит ϵ в евклидовой

метрике. Пусть каждая точка контура γ будет нулем r -го порядка функции $\gamma(t_1, t_2) = 0$.

Определение 2.5 [19]. Конечной частью интеграла $H(f, \gamma)$ назовем предел

$$H(f, \gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{R_2 \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{f(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 - \frac{F_{\gamma, \varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}} \right],$$

где $F_{\gamma, \varepsilon}(\varepsilon)$ функция, удовлетворяющая двум условиям:

1) в области Γ_ε функция $F_{\gamma, \varepsilon}(\varepsilon)$ имеет непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка;

2) предел существует.

Рассмотрим бигиперсингулярный интеграл

$$B\varphi = \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

где γ_i – замкнутый гладкий контур в плоскости комплексной переменной z_i , $i = 1, 2$.

Построим окружность с центром в точке t_1 столь малого радиуса ρ_1 , что она пересекает контур γ_1 только в двух точках t_1' и t_1'' . Часть контура γ_1 , заключенного между точками t_1' и t_1'' , обозначим через l_1 .

Аналогичное построение проведем и на контуре γ_2 , и часть контура γ_2 , расположенного между точками t_2' и t_2'' , обозначим через l_2 .

Интеграл $B\varphi$ определяется выражением

$$B\varphi = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma_1 \setminus l_1} \int_{\gamma_2 \setminus l_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} - \frac{\Gamma(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1^{p_1-1} \rho_2^{p_2-1}} \right],$$

где $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ – функция, имеющая непрерывно дифференцируемые производные до (p_1-1) -го порядка по переменной ρ_1 и до (p_2-1) -го порядка по переменной ρ_2 . Функция $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ выбирается таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

Отметим, что в соответствии с принятым в работе способом определения гиперсингулярных интегралов для нахождения функции $\Gamma(\rho_1, \rho_2)$ нужно вычислить по частям последний интеграл и из результата вычесть слагаемые, стремящиеся к бесконечности, когда $\rho_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$.

3. Постановка задачи построения оптимальной квадратурной формулы

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову и, в применении к ГИ, заключается в следующем [3].

Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad p - \text{целое}, \quad a < t < b, \quad (2)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^p \varphi^{(l)}(s_k) p_{kl}(t) + R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi) \quad (3)$$

с узлами s_k и весами $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, p$).

Под погрешностью квадратурной формулы (3) будем понимать величину $R_N(s_k, p_{kl}, \varphi) = \sup_t |R_N(t, s_k, p_{kl}(t), \varphi)|$. Если Ψ – некоторый класс

заданных на сегменте $[a, b]$ функций, то положим $R_N(s_k, p_{kl}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_N(s_k, p_{kl}, \varphi)|$. Через $\zeta_N[\Psi]$ обозначим функционал

$\zeta_N[\Psi] = \inf_{(s_k, p_{kl})} R_N(s_k, p_{kl}, \Psi)$, в котором нижняя грань берется по

всевозможным N узлам s_k и весам $p_{kl}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$, $l = 0, 1, \dots, p$).

Квадратурную формулу (3), построенную на узлах s_k^* и весах $p_{kl}^*(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной,

оптимальной по порядку, если $\frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi)}{\zeta_N[\Psi]} = 1$,

$R_N(s_k^*, p_{kl}^*, \Psi) \bigcup_{\cap} \zeta_N[\Psi]$ соответственно.

Аналогичным образом определяются оптимальные кубатурные формулы для полигиперсингулярных интегралов.

4. Обзор приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов

Приближенным методам вычисления ГИ посвящено большое число публикаций, частично представленных в [3].

Для вычисления ГИ с фиксированными особенностями вида

$$F\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|\tau|^{p+\lambda}} \quad \text{и} \quad I\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau^p}$$

используются квадратурные формулы, основанные на различных подходах. Основной метод построения квадратурных формул для вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ заключается в замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ n -мерным аппаратом приближения: интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками ортогональных рядов и т.д. Достаточно подробная библиография, посвященная вычислению интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ содержится

в [3, 18, 25–27]. В работах [3, 18, 25] построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов $F\varphi$ и $I\varphi$ на классах функций $W_p^r(1)$.

Для вычисления гиперсингулярных интегралов $H\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}}$ и $G\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}$, $-1 < t < 1$, различными авторами [3, 6, 7, 9, 11, 13, 16–18, 26,

28–38] предложены и обоснованы различные квадратурные формулы, которые условно можно разделить на две большие группы: квадратурные формулы интерполяционного типа и квадратурные формулы типа Гаусса.

К первой группе (см. статьи [10, 18, 19, 25, 26, 33, 34]) относятся квадратурные формулы, основанные на замене подынтегральной функции $\varphi(t)$ интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками рядов по ортогональным функциям.

К этой группе также относятся квадратурные формулы, построенные методом дискретных вихрей [5, 6].

Ко второй группе (см. статьи [7–9, 12–14, 16, 17, 38]) относятся квадратурные формулы, являющиеся аналогами формул Гаусса для ГИ. Построение этих формул основано на представлении ГИ в виде

$$(G\varphi)(t) = \varphi(t) \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau-t)^p} d\tau \quad (4)$$

и в применении к последнему интегралу квадратурных формул Гаусса.

Для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad p = 2, 3, 4, \quad (5)$$

построены квадратурные формулы, основанные на различных технологиях. Обзор некоторых из них содержится в монографии [3], которая посвящена в основном построению оптимальных методов вычисления ГИ. Поэтому ряд технологий построения методов вычисления ГИ был опущен. Среди них в первую очередь необходимо отметить методы вычисления ГИ, основанные на свойствах ортогональных многочленов [28]. Эти методы возникли при построении численных алгоритмов решения гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) первого рода вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{(\tau-t)^2} + \frac{\alpha}{\tau-t} + h(t, \tau) \right] x(\tau) d\tau = f(t). \quad (6)$$

Решение уравнения (6) при гладкой правой части имеет вид $x(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2} \psi(t)$, или $x(t) = ((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2} \psi(t)$, где $\psi(t)$ – гладкая функция.

Поэтому естественно искать решение уравнения (6) в виде функций

$$x_n(t) = (1-t^2)^{1/2} \sum_{k=0}^n U_k(t),$$

$$x_n(t) = (1-t^2)^{-1/2} \sum_{k=0}^n T_k(t),$$

или

$$x(t) = \left(\frac{(1-t)}{(1+t)} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^n S_k(t),$$

где $T_k(t)$, $U_k(t)$, $S_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, – полиномы Чебышева первого, второго и третьего рода соответственно.

Методы вычисления гиперсингулярных интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau \quad (7)$$

при $p = 2$ на классах весовых функций $\omega(t) = (1-t^2)^{\pm 1/2}$, или $\omega(t) = ((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}$, представлены в работах [28, 35, 39].

Если правая часть в уравнении (6) является кусочно-постоянной функцией или имеет особенности (интегрируемые или неинтегрируемые по Риману), то классы функций, к которым принадлежат решения таких уравнений, в настоящее время неизвестны. Поэтому возникает необходимость в построении методов вычисления гиперсингулярных интегралов в общем случае, когда единственное условие, налагаемое на интегрируемую функцию, заключается в том, что рассматриваемый интеграл существует.

В работах [20, 21] построены квадратурные формулы вычисления ГИ вида с весовой функцией $\omega(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta) \geq 0$.

В работе [40] построены квадратурные формулы вычисления ГИ (5), основанные на аппроксимации подынтегральной функции интерполяционными полиномами Лагранжа – Эрмита. Построены ненасыщаемые квадратурные формулы.

В работе [35] рассматриваются интегралы

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{m-1/2} T_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{m-1/2} U_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad p = 2, 3, 4, \quad m > 3, \quad (8)$$

где $U_n(t)$, $T_n(t)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода; $m \geq 0$.

Один из приемов, используемых при вычислении гиперсингулярных интегралов, заключается [7] в понижении порядка особенностей:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{p+1}} = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} \right) d\tau = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p}. \quad (9)$$

Этот прием использовался во многих последующих работах [12, 35].

Построение фундаментальных решений систем уравнений, моделирующих многослойные пластины, приводит [19] к новому классу гиперсингулярных интегралов, введенных выше определением 1.5.

В отличие от известных видов ГИ, имеющих особенности в отдельных точках или на топологическом произведении прямых, множество особых точек интеграла (2.1) в общем случае представляет собой кривые, которые могут иметь точки самопересечения. Эти кривые определяются уравнением $\gamma(t_1, t_2) = 0$, имеющим нули до r -го порядка.

Кубатурные формулы вычисления интеграла (1) построены в [27, 33]. В работе [41] предложен аналитический метод вычисления ГИ различных видов, в том числе интегралов вида (1). Показано, что для вычисления ГИ на ряде классов функций можно построить формулы, аналогичные формуле Ньютона – Лейбница для определенных интегралов. Там же построен аналитико-численный метод вычисления многомерных ГИ, в котором по одной переменной применяется аналитический метод, а по остальным – численный.

В работе [42] построены квадратурные формулы вычисления преобразования Адамара

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + R_n(\varphi), \quad -\infty < t < \infty,$$

где

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \varphi(t_k) \psi_k(t), \quad \psi_k(t) = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^n c_l(t) c_l(t_k) + s_l(t) s_l(t_k) \right),$$

$$t_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n+1}, \quad k = -n, \dots, n, \quad c_l(t) = \cos(2l \operatorname{arctg} t), \quad s_l(t) = \sin(2l \operatorname{arctg} t).$$

Эта квадратурная формула используется при построении методов коллокации и механических квадратур для решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси [43].

В последние десятилетия опубликовано большое число работ, посвященных распространению классических квадратурных формул вычисления определенных интегралов на гиперсингулярные интегралы. В частности, методу Гаусса посвящены работы [16, 30], методу Ньютона – Котеса – работы [31, 44], методу сигмоидальной трансформации – статья [32].

В работе [36] предложена следующая квадратурная формула Гаусса:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(\tau)}{(\tau-t)^2} g(\tau) d\tau \cong \sum_{i=1}^n \frac{(1-\tau_i^2)}{n+1} \frac{g(\tau_i)}{(\tau_i-t_j)^2} - (n+1) g(t_j), \quad j=1, 2, \dots, n+1, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad w(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}, \quad \tau_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}, \quad t_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2(n+1)}, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$j=1, 2, \dots, n+1.$$

Здесь узлы τ_i ($i=1,2,\dots,n$) и t_j ($j=1,2,\dots,n+1$) являются соответственно узлами полиномов Чебышева первого и второго рода.

Эта формула справедлива на дискретном множестве точек t_j , $j=0,1,2,\dots,n+1$.

В работе [37] предложено обобщение формулы (10):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t)g(t)}{(t-x)^2} dt \cong \sum_{i=1}^n \frac{1-t_i^2}{(n+1)(t_i-x)^2} \left(1 - \frac{T_{n+1}(x)}{T_{n+1}(t_i)} \right) - (n+1)g(x).$$

Одним из эффективных методов вычисления ГИ является метод интерполяционных квадратур Гаусса – Якоби. В работе [36] предложена методология построения интерполяционных квадратур Гаусса – Якоби, единая для интегралов в смысле Римана, сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Квадратурная формула Симпсона для ГИ с особенностью второго порядка исследуется в [44]. Точность стандартной квадратурной формулы Симпсона применительно к ГИ с особенностью второго порядка равна $O(h)$, где h – максимальное расстояние между узлами квадратурной формулы. В работе [45] построена модификация квадратурной формулы Симпсона, точность которой при совпадении особой точки с узлами квадратурной формулы на порядок выше. Авторы назвали такой эффект сверхсходимостью.

В работе [46] метод Эйлера – Маклорена распространен на ГИ следующих видов:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^{p+1}} d\tau, \quad \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{|\tau-t|^{p+1}} d\tau.$$

5. Об одном приеме построения квадратурных формул вычисления гиперсингулярных интегралов

Определение ГИ по формуле (9) удобно при построении и оценке погрешности квадратурных формул, инициированных квадратурными формулами вычисления СИ.

Ряд задач аэродинамики моделируется ГИУ вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = f(s). \quad (11)$$

В работе [47] для решения этого уравнения используется метод дискретных вихрей. В работе [48] для вычисления интеграла (11) построена квадратурная формула интерполяционного вида.

Продemonстрируем на примере интеграла (11) применение формулы (9). Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{2\sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = \frac{d}{ds} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \frac{\sigma-s}{2} d\sigma.$$

Приближенному вычислению интеграла $\tilde{x}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \frac{\sigma-s}{2} d\sigma$

посвящено большое число работ [1, 48, 49].

Приведем следующую квадратурную формулу [1]:

$$\tilde{x}(s) = -\frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_k \sin(n+1) \frac{(s_k-s)}{2} \sin n \frac{(s_k-s)}{2} \operatorname{cosec} \frac{(s_k-s)}{2} + R_n(x), \quad (12)$$

$$x_k = x(s_k), \quad s_k = 2k\pi / (2n+1),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(\sigma)}{2 \sin^2 \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma &= \frac{n+1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_k \cos(n+1) \frac{(s_k-s)}{2} \sin n \frac{(s_k-s)}{2} \operatorname{cosec} \frac{(s_k-s)}{2} + \\ &+ \frac{n}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_k \sin(n+1) \frac{(s_k-s)}{2} \cos n \frac{(s_k-s)}{2} \frac{(s_k-s)}{2} - \frac{1}{2n+1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{2n} x_k \sin(n+1) \frac{(s_k-s)}{2} \sin n \frac{(s_k-s)}{2} \cos \frac{(s_k-s)}{2} \left(\operatorname{cosec} \frac{(s_k-s)}{2} \right)^2 + R_n^*(x). \quad (13) \end{aligned}$$

Погрешность квадратурной формулы (12) на классе функций $W^r H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, оценивается неравенством $\|R_n(x)\| \leq C \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}$.

В работе [50] показано, что если при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\|f(s) - P_n(s)\|_{C([0,2\pi])} \leq C \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}},$$

где $P_n(s)$ – полином степени n , то

$$\|f'(s) - (P_n(s))'\|_{C([0,2\pi])} \leq C \frac{\ln n}{n^{r-1+\alpha}}.$$

Следовательно, $|R_n^*(x)| \leq C \frac{\ln n}{n^{r-1+\alpha}}$.

Отметим, что построенная квадратурная формула позволяет совмещать узлы коллокации и узлы квадратурной формулы при построении вычислительной системы для уравнения (11).

Квадратурные формулы (12), (13) не оптимальные. Оптимальные по порядку формулы построены в [3], но они требуют «обхода» особой точки.

Воспользовавшись формулой Пуанкаре, имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau-t} =$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = \frac{(-1)^p}{(p-1)! i^p e^{i(p-1)s}} \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \frac{2}{2n+1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{2n} \tilde{x}_k \sin(n+1) \frac{(s_k-s)}{2} \sin n \frac{(s_k-s)}{2} \operatorname{cosec} \frac{(s_k-s)}{2} + R_n^{**}(x), \quad (14)$$

где $\tilde{x}_k = x(e^{is_k})$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Погрешность этой формулы на классе $W^s H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, оценивается неравенством $|R_n^{**}(W^s H_\alpha(M))| \leq C n^{-s-p+1} \ln n$.

Аналогичным образом строятся кубатурные формулы для вычисления полисингулярных интегралов вида

$$\int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_l} \frac{\varphi(\tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} \dots (\tau_l - t_l)^{p_l}},$$

где $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, l$, – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной $z_i, i = 1, 2, \dots, l$.

Остановимся на случае, когда $p_i = 2, i = 1, 2, \dots, l$.

Ограничимся рассмотрением интеграла с ядром Гильберта:

$$\Gamma\varphi = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) d\sigma_1 \dots d\sigma_l}{2^l \sin^2 \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \dots \sin^2 \frac{\sigma_l - s_l}{2}}.$$

Интеграл $\Gamma\varphi$ можно записать в виде

$$\Gamma\varphi = \frac{1}{(2\pi)^l} \frac{\partial}{\partial s_1} \dots \frac{\partial}{\partial s_l} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \dots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_l - s_l}{2} d\sigma_1 \dots d\sigma_l.$$

Аппроксимируем функцию $\varphi(s_1, \dots, s_l)$ интерполяционными полиномами

$$\varphi_{n \dots n}(s_1, s_2, \dots, s_l) = P_{n \dots n}(\varphi; s_1, s_2, \dots, s_l) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \dots \sum_{k_l=0}^{2n} \varphi(s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_l}) \psi_{k_1}(s_1) \dots \psi_{k_l}(s_l).$$

В результате приходим к кубатурной формуле

$$\Gamma\varphi = (-1)^l \left(\frac{2}{2n+1} \right)^l \sum_{k_1=0}^{2n} \sum_{k_2=0}^{2n} \dots \sum_{k_l=0}^{2n} \varphi(s_{k_1}, s_{k_2}, \dots, s_{k_l}) \times$$

$$\times \left(\sum_{v=1}^n v \cos v(s_1 - s_{k_1}) \right) \dots \left(\sum_{v=1}^n v \cos v(s_l - s_{k_l}) \right) + R_{n \dots n}^{**}(\varphi). \quad (15)$$

Для оценки погрешности $R_{n...n}^{**}(\varphi)$ кубатурной формулы (15) воспользуемся оценкой погрешности кубатурной формулы следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^l} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \dots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_l - s_l}{2} d\sigma_1 \dots d\sigma_l = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \varphi_{n...n}(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \dots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_l - s_l}{2} d\sigma_1 \dots d\sigma_l + R_{n...n}(\varphi). \end{aligned}$$

$$\text{Известно [3], что } \left| R_{n...n} \left[W^{r, \dots, r} H_{\alpha, \dots, \alpha} \right] \right| \leq C \frac{\ln^l n}{n^{r+\alpha}}.$$

Воспользовавшись этим неравенством и распространяя на многомерный случай известные [50] оценки $\left\| \frac{d}{dx}(f(x) - T_n(x)) \right\|$, приходим к неравенству

$$\left\| R_{n...n}^{**} \left(W^{r, \dots, r} H_{\alpha, \dots, \alpha}(M) \right) \right\| \leq C \frac{\ln^l n}{n^{r+\alpha-1}}.$$

Список литературы

1. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев : Наукова думка, 1968. 288 с.
2. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. 360 с.
3. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. 250 с.
4. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : ЮМИ, 2011.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
6. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М. : Янус-К, 2001. 508 с.
7. Kutt H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration // Numerical Mathematics. 1975. Vol. 24. P. 205–210.
8. Paget D. F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals // Numerical Mathematics. 1981. Vol. 36. P. 447–453.
9. Ioakimidis M. I. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-type integrals // Anal. Numer. Theor. Approx. 1983. Vol. 12. P. 131–140.
10. Bialecki B. A sine quadrature rule for Hadamard finite-part integrals // Numerical Mathematics. 1990. Vol. 57. P. 263–269.
11. Lutz E., Gray L. J., Inghaffea A. R. An overview of integration methods for hypersingular integrals // Boundary Elements. 1991. Vol. 13. P. 913–925.
12. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives // Numer. Math. 1987. Vol. 50. P. 273–281.
13. Monegato G. Numerical evaluation of hypersingular integrals // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. Vol. 50. P. 9–31.

14. Monegato G. The numerical evaluation of 2-D Cauchy principal value integral arising in boundary integral equation methods // *Math. Comp.* 1994. Vol. 64. P. 765–777.
15. Diethelm K. Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic properties and error estimates // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1995. Vol. 65. P. 97–114.
16. Criscuolo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard-type finite integrals // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1997. Vol. 78. P. 255–275.
17. Korsunsky A. M. Gauss-Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals // *Quart. Appl. Math.* 1998. Vol. 56. P. 461–472.
18. Boykov I. V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals // *J. Math. Math. Sci.* 2001. Vol. 28. P. 127–179.
19. Boykov I. V., Boykova A. I., Ventsel E. S. Fundamental solutions for thick sandwich plates // *Engineering Analysis and Boundary Elements.* 2004. Vol. 28. P. 1437–1444.
20. Саакян А. В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур // *Известия Национальной Академии Наук Армении. Механика.* 2020. Т. 73, № 2. С. 44–57.
21. Саакян А. В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* 2020. № 2. С. 94–100.
22. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* New Haven : Yale Univ. Press., 1923.
23. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М. : Наука, 1978. 351 с.
24. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // *Ученые записки Казанского государственного университета.* 1953. Т. 113, кн. 10. С. 57–105.
25. Бойков И. В., Добрынина Н. Ф., Домнин Л. Н. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПензГТУ, 1996. 188 с.
26. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals // *Computers and Mathematics with Applications.* 2001. Vol. 41. P. 327–352.
27. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals // *Applied Numerical.* 2009. Vol. 59, № 6. P. 1366–1385.
28. Kaya A. C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels // *Quaterly of applied mathematics.* 1987. Vol. 45, № 1. P. 105–122.
29. Linkov A. M., Mogilevskaya S. G. Finite part integrals in problems of three-dimensional cracks // *Prikl. Mat. Mekh.* 1986. Vol. 50. P. 844–850.
30. Hui C. Y., Shia D. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 1999. Vol. 44. P. 205–214.
31. Du Q. K. Evaluations of certain hypersingular integrals on interval // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2001. Vol. 51. P. 1195–1210.
32. Choi U. J., Kim S. W., Yun B. Improvement of the asymptotic behaviour of the Euler–Maclaurin formula for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2004. Vol. 61. P. 496–513.
33. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations // *Anal. Boundary Elements.* 2006. Vol. 30. P. 799–807.
34. Hildenbrand J., Kuhn G. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor // *Anal. Boundary Elements.* 1992. Vol. 10. P. 209–217.
35. Chan Y.-S., Fannjiang A., Paulino G. H. Integral equations with hypersingular kernels—theory and applications to fracture mechanics // *International Journal of Engineering Science.* 2003. Vol. 41. P. 683–720.

36. Korsunsky A. M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics // *Proceeding of the Royal Society. A. Mathematical, physical and engineering sciences*. 2002. Vol. 458. P. 2721–2733.
37. Kazuhiro O., Nao-Aki N. An Iterative Algorithm of Hypersingular Integral Equations for Crack Problems // *Key Engineering Materials*. Vols. 2008. P. 793–796.
38. Obaiys S. J., Ibrahim. R. W., Ahmad A. F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study // *Differential and Integral Inequalities*. Ed.: Dorin Andrica Themistocles. M. : Rassias. Springer, 2019. P. 687–717.
39. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2016. Т. 19, № 4. С. 419–428.
40. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Гринченков Г. И., Семов М. А. Ненасыщаемые кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2013. № 3. С. 5 – 25.
41. Бойков И. В., Семов М. А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // *Известия вузов*. 2016. № 3. С. 3–17.
42. Солиев Ю. С. К приближенному вычислению гиперсингулярного интеграла по действительной оси // *Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й Междунар. Саратовской зимней школы, посвящ. 90-летию акад. П. Л. Ульянова*. Саратов : Научная книга , 2018. С. 297–299.
43. Бойков И. В., Айкашев П. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2020. Т. 22, № 4. С. 405–423.
44. Wu J. M. , Yu D. H. The approximate computation of hypersingular integrals on interval Chines // *J. Numer. Math. Appl*. 1999. Vol. 21. P. 25–33.
45. Zhang D. H., Yu X., Wu J. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 223, iss. 2. P. 598–613.
46. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals // *Discrete Continuous Dynamical Systems*. 2015. Vol. 20, iss. 5. P. 1355–1375.
47. Лифанов И. К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью // *Оптимальные методы вычислений и их применение : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 7*. Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1985. С. 38–45.
48. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полякова Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Харьков : Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1992. Ч. 2. 145 с.
49. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. Т. 1. 615 с.
50. Gaier D. *Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung*. Berlin : Heidelberg : Springer, 1964. 294 p.

References

1. Ivanov V.V. *Teoriya priblizhennykh metodov i ee primeneniye k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravneniy* = *The theory of approximate methods and its application to the numerical solution of singular integral equations*. Kiev: Naukova dumka, 1968:288. (In Russ.)
2. Boykov I.V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. 1. Singulyarnyye integraly* = *Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular integrals*. Penza: Izd-vo PGU, 2005:360. (In Russ.)
3. Boykov I.V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch.2. Gipersingulyarnyye integraly* = *Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals*. Penza: Izd-vo PGU, 2009:250. (In Russ.)

4. Khubezhty Sh.S. *Kvadrurnye formuly dlya singulyarnykh integralov i nekotorye ikh primeneniya* = *Quadrature formulas for singular integrals and some of their applications*. Vladikavkaz: YuMI, 2011. (In Russ.)
5. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment* = *Singular integral equations method and numerical experiment*. Moscow: Yanus, 1995:520. (In Russ.)
6. Vaynikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskiy L.N. *Chislennyye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* = *Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*. Moscow: Yanus-K, 2001:508. (In Russ.)
7. Kutt H.R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerical Mathematics*. 1975;24:205–210.
8. Paget D.F. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals. *Numerical Mathematics*. 1981;36:447–453.
9. Ioakimidis M.I. A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-type integrals. *Anal. Numer. Theor. Approx.* 1983;12:131–140.
10. Bialecki B. A sine quadrature rule for Hadamard finite-part integrals. *Numerical Mathematics*. 1990;57:263–269.
11. Lutz E., Gray L.J., Ingrassia A.R. An overview of integration methods for hypersingular integrals. *Boundary Elements*. 1991;13:913–925.
12. Monegato G. On the weights of certain quadratures for the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals and their derivatives. *Numer. Math.* 1987;50:273–281.
13. Monegato G. Numerical evaluation of hypersingular integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1994;50:9–31.
14. Monegato G. The numerical evaluation of 2-D Cauchy principal value integral arising in boundary integral equation methods. *Math. Comp.* 1994;64:765–777.
15. Diethelm K. Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic properties and error estimates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1995;65:97–114.
16. Criscuolo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard-type finite integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1997;78:255–275.
17. Korsunsky A.M. Gauss-Chebyshev quadrature formulae for strongly singular integrals. *Quart. Appl. Math.* 1998;56:461–472.
18. Boykov I.V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals. *J. Math. Math. Sci.* 2001;28:127–179.
19. Boykov I.V., Boykova A.I., Ventsel E.S. Fundamental solutions for thick sandwich plates. *Engineering Analysis and Boundary Elements*. 2004;28:1437–1444.
20. Saakyan A.V. Solution of the problem for an edge crack with a hypersingular constitutive equation by the mechanical quadrature method. *Izvestiya Natsional'noy Akademii Nauk Armenii. Mekhanika* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia*. 2020;73(2):44–57. (In Russ.)
21. Saakyan A.V. Quadrature formula for a hypersingular integral containing the weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* = *University proceedings. North Caucasian region. Natural sciences*. 2020;2:94–100. (In Russ.)
22. Hadamard J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven: Yale Univ. Press., 1923.
23. Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* = *Cauchy problem for linear partial differential equations of hyperbolic type*. Moscow: Nauka, 1978:351. (In Russ.)
24. Chikin L.A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta* = *Proceedings of Kazan State University*. 1953;113:10:57–105. (In Russ.)
25. Boykov I.V., Dobrynina N.F., Domnin L.N. *Priblizhennyye metody vychisleniya integralov Adamara i resheniya gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniy* =

- Approximate methods for calculating Hadamard integrals and solving hypersingular integral equations*. Penza: Izd-vo PenzGTU, 1996:188. (In Russ.)
26. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals. *Computers and Mathematics with Applications*. 2001;41:327–352.
 27. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals. *Applied Numerical*. 2009;59(6):1366–1385.
 28. Kaya A.C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels. *Quatery of applied mathematics*. 1987;45(1):105–122.
 29. Linkov A.M., Mogilevskaya S.G. Finite part integrals in problems of three-dimensional cracks. *Prikl. Mat. Mekh.* 1986;50:844–850.
 30. Hui C.Y., Shia D. Evaluations of hypersingular integrals using Gaussian quadrature. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 1999;44:205–214.
 31. Du Q.K. Evaluations of certain hypersingular integrals on interval. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2001;51:1195–1210.
 32. Choi U.J., Kim S.W., Yun B. Improvement of the asymptotic behaviour of the Euler–Maclaurin formula for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2004;61:496–513.
 33. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. An approximate solution of hypersingular integral equations. *Anal. Boundary Elements*. 2006;30:799–807.
 34. Hildenbrand J., Kuhn G. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor. *Anal. Boundary Elements*. 1992;10:209–217.
 35. Chan Y.S., Fannjiang A., Paulino G.H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41:683–720.
 36. Korsunsky A.M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics. *Proceeding of the Royal Society. A. Mathematical, physical and engineering sciences*. 2002;458:2721–2733.
 37. Kazuhiro O., Nao-Aki N. An Iterative Algorithm of Hypersingular Integral Equations for Crack Problems N. *Key Engineering Materials. Vols.* 2008:793–796.
 38. Obaiys S.J., Ibrahim. R.W., Ahmad A.F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study. *Differential and Integral Inequalities*. Moscow: Rassias. Springer, 2019:687–717.
 39. Plieva L.Yu. Interpolation-type quadrature formulas for hypersingular integrals on the interval of integration. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2016;19(4):419–428. (In Russ.)
 40. Boykov I.V., Zakharova Yu.F., Grinchenkov G.I., Semov M.A. Unsaturated cubature formulas for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2013;3:5–25. (In Russ.)
 41. Boykov I.V., Semov M.A. On the method for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vuzov = University proceedings*. 2016;3:3–17. (In Russ.)
 42. Soliev Yu.S. Approximate calculation of the hypersingular integral along the real axis. *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 19-y Mezhdunar. Saratovskoy zimney shkoly, posvyashch. 90-letiyu akad. P. L. Ul'yanova = Modern problems of function theory and their applications: proceedings of the 19th International Saratov winter school dedicated to the 90th anniversary of academician P. L. Ulyanov*. Saratov: Nauchnaya kniga, 2018:297–299. (In Russ.)
 43. Boykov I.V., Aykashev P.V., Boykova A.I. Approximate methods for solving hypersingular integral equations on the number axis. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2020;22(4):405–423. (In Russ.)
 44. Wu J.M., Yu D.H. The approximate computation of hypersingular integrals on interval Chines. *J. Numer. Math. Appl.* 1999;21:25–33.

45. Zhang D.H., Yu X., Wu J. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009;223(2):598–613.
46. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals. *Discrete Continuous Dynamical Systems*. 2015;20(5):1355–1375.
47. Lifanov I.K. Numerical solution of Hilbert's singular integral equations with a strong singularity. *Optimal'nye metody vychisleniy i ikh primeneniye: mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 7 = Optimal computation methods and their application: intercollegiate collected articles*. Edition 7. Penza: Penz. politekhn. in-t, 1985:38–45. (In Russ.)
48. Gandel' Yu.V., Eremenko S.V., Polyakova T.S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov = Mathematical problems of the method of discrete currents*. Kharkov: Izd-vo Khar'kov. gos. un-ta, 1992;2:145. (In Russ.)
49. Zigmund A. *Trigonometricheskie ryady = Trigonometric series*. Moscow: Mir, 1965;1:615. (In Russ.)
50. Gaier D. *Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung*. Berlin: Heidelberg: Springer, 1964:294.

Информация об авторах / Information about the authors

Илья Владимирович Бойков

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

И'я V. Boykov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head
of the sub-department of higher
and applied mathematics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Павел Владимирович Айкашев

аспирант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Pavel V. Aykashev

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Поступила в редакцию / Received 10.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 22.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020

УДК 519.63: 621.372.8

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-7

Исследование задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем

Ю. Г. Смирнов¹, Е. Ю. Смолькин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹mmm@pnzgu.ru, ²e.g.smolkin@hotmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование свойств спектра задачи распространения электромагнитных волн открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем. *Материалы и методы.* Для исследования задачи применен метод оператор-функций. *Результаты.* Изучены спектральные свойства задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем. *Вывод.* Предложенный подход может быть применен для исследования поверхностных волн регулярных неоднородных открытых волноводящих структур с киральными средами.

Ключевые слова: электромагнитные волны, уравнения Максвелла, метод оператор-функций, киральная среда

Финансирование: работа поддержана грантом Российского научного фонда № 20-11-20087.

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Исследование задачи о нормальных волнах открытого волновода кругового сечения с неоднородным киральным слоем // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1 (57). С. 85–101. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-7

Problem research of an open circular waveguide normal waves with an inhomogeneous chiral layer

Yu.G. Smirnov¹, E.Yu. Smol'kin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹mmm@pnzgu.ru, ²e.g.smolkin@hotmail.com

Abstract. *Background.* The aim of this work is to study the properties of the spectrum of the problem of propagation of electromagnetic waves of an open circular waveguide with an inhomogeneous chiral layer. *Material and methods.* To find a solution, the method of operator-functions is used. *Results.* Spectral properties of the problem of normal waves of an open circular waveguide with an inhomogeneous chiral layer are studied. *Conclusions.* The proposed approach can be applied to study surface waves of regular inhomogeneous open wave-carrying structures with chiral media.

Keywords: electromagnetic waves, Maxwell's equation, operator-function method, chiral medium

Acknowledgments: the work is supported by the Russian Science Foundation No 20-11-20087.

For citation: Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. Problem research of an open circular waveguide normal waves with an inhomogeneous chiral layer. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings.*

Введение

В электродинамике большую роль играют задачи о распространении электромагнитных волн в волноведущих структурах. Эти задачи в случае однородного заполнения волновода были подробно изучены в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского. Однако при неоднородном заполнении волновода возникают значительно более сложные краевые задачи на собственные значения для систем уравнений Гельмгольца с разрывными коэффициентами, причем на поверхностях разрыва коэффициентов условия сопряжения содержат спектральный параметр. В задачах для неоднородных структур спектральный параметр входит в условия сопряжения нелинейным образом. Задача становится несамосопряженной и нелинейной по спектральному параметру [1–3].

Для исследования таких задач на собственные значения оказывается естественным и эффективным применение метода операторных пучков. С помощью вариационного подхода исходная краевая задача сводится к изучению некоторого операторного пучка в подходящем пространстве Соболева. Для исследования свойств операторов пучка можно использовать аппарат функционального анализа, а для изучения его спектральных свойств – хорошо развитую теорию операторных пучков (см. [2–4]). В работах [1–5] в целом построена теория распространения нормальных волн в закрытых (экранированных) неоднородных волноведущих структурах. Точнее, доказана дискретность спектра задачи, получены результаты о распределении и локализации характеристических чисел на комплексной плоскости. Кроме того, доказан ряд теорем о кратной полноте по Келдышу системы собственных и присоединенных векторов пучка в выбранных пространствах Соболева.

Но для открытых (неэкранированных или частично экранированных) структур достаточно полной теории распространения нормальных волн до сих пор не построено. Из-за некомпактности соответствующих операторов (в силу неограниченности области) задача становится значительно сложнее: пучок уже не будет фредгольмовым, и известные теоремы о свойствах пучка применить не удастся. В статье предлагается перейти к задаче в ограниченной области с помощью представления решения через функцию Грина внешности достаточно большого круга и использования условий сопряжения. Но при этом теряется полиномиальная зависимость от спектрального параметра и голоморфность оператор-функции во всей комплексной плоскости. Первые результаты по исследованию этой задачи получены недавно [6] для круглого волновода.

В последнее время в связи с прогрессом в области полимерных технологий появились новые синтезированные киральные материалы, которые способствовали развитию интереса к исследованиям в этой области. В нашей стране киральными средами занимались и занимаются С. А. Третьяков, А. Н. Боголюбов, В. А. Неганов, О. В. Осипов и другие ученые. При взаимодействии электромагнитной волны с киральной средой наблюдается ряд специфических эффектов [7, 8].

Исследование спектра открытых волноведущих структур приводит к тому, что в вариационном соотношении появляется оператор следа (на границе фиктивной области), нелинейным образом зависящий от спектрального параметра. Приходится анализировать уже не операторный пучок (как в [5]), а оператор-функцию. Тем не менее удастся достаточно подробно изучить свойства оператор-функции и получить результаты о ее спектре. В статье доказывается дискретность спектра задачи о нормальных волнах неоднородной волноведущей структуры кругового сечения, заполненной киральной средой. Представлены результаты численного исследования спектра распространяющихся поверхностных волн открытого волновода.

Отметим, что мы рассматриваем лишь поверхностные волны, убывающие на удалении от волновода в поперечном сечении (и накладываем соответствующие условия на бесконечности). Другие типы волн в данной статье не рассматриваются.

1. Постановка задачи

Волноведущую структуру будем рассматривать в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с цилиндрической системой координат $0\rho\varphi z$. Пространство заполнено изотропной однородной средой без источников с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитной проницаемостью $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. В $\mathbb{R}^3$ помещен цилиндрический металло-диэлектрический волновод с киральным слоем

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

с образующей, параллельной оси Oz . Волновод имеет поперечное круговое сечение, показанное на рис. 1. Это кольцо с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r . Граница $\rho = r_0$ является проекцией поверхности идеально проводящего экрана, а граница $\rho = r$ является проекцией поверхности диэлектрика.

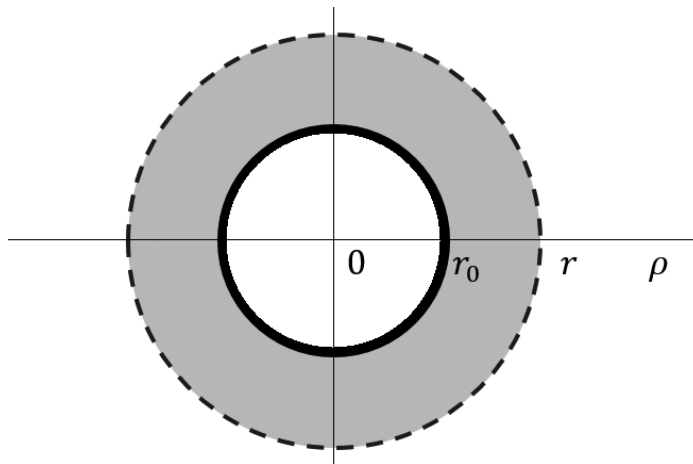


Рис. 1. Поперечное сечение волноведущей структуры

В рассматриваемой задаче необходимо найти (нетривиальные) решения однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с гармонической зависимостью e^{iyz} от продольной координаты z :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\tilde{\epsilon}\mathbf{E} - \omega\tilde{\chi}\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\tilde{\mu}\mathbf{H} - \omega\tilde{\chi}\mathbf{E}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{iyz}, \\ \mathbf{H} &= (H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + H_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{iyz}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом должны быть удовлетворены условия ограниченности энергии поля в любом конечном объеме, краевые условия для касательных составляющих электрического поля на поверхности идеального проводника:

$$E_\varphi|_{\rho=r_0} = 0, \quad E_z|_{\rho=r_0} = 0, \quad (3)$$

и условия непрерывности касательных составляющих полей на границе раздела сред

$$\begin{aligned} [E_\varphi]|_{\rho=r} &= 0, \quad [E_z]|_{\rho=r} = 0, \\ [H_\varphi]|_{\rho=r} &= 0, \quad [H_z]|_{\rho=r} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $[f]|_{\rho_0} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0-0} f(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow \rho_0+0} f(\rho)$, а также условие излучения на бесконечности: убывание электромагнитного поля при $\rho \rightarrow \infty$.

Диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и киральность во всем пространстве имеют вид

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon(\rho), & r_0 \leq \rho \leq r, \\ \epsilon_0, & \rho > r; \end{cases} \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu(\rho), & r_0 \leq \rho \leq r, \\ \mu_0, & \rho > r; \end{cases} \quad \tilde{\chi} = \begin{cases} \chi, & r_0 \leq \rho \leq r, \\ 0, & \rho > r, \end{cases} \quad (5)$$

где $\epsilon(\rho) \in C^1[r_0, r]$, $\min_{[r_0, r]} \epsilon(\rho) > \epsilon_0$, $\mu(\rho) \in C^1[r_0, r]$, $\min_{[r_0, r]} \mu(\rho) > \mu_0$ и χ – вещественная постоянная.

Принята следующая классификация волн [1–4]. В зависимости от спектрального параметра γ (постоянной распространения) волны бывают трех типов: распространяющиеся, затухающие, комплексные.

Определение 1. Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ .

Определение 2. Затухающая волна характеризуется чисто мнимым параметром γ .

Определение 3. Комплексная волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $\operatorname{Re} \gamma \operatorname{Im} \gamma \neq 0$.

В зависимости от условия на бесконечности волны бывают двух типов: поверхностные и вытекающие. В статье рассматриваются только поверхностные волны.

Определение 4. Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(\rho) \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$.

Таким образом, рассматривается задача о распространении поверхностных волн в волноведущей структуре, которая заключается в нахождении собственных значений для системы уравнений Максвелла (с перечисленными выше условиями) относительно спектрального параметра γ – постоянной распространения волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатной форме:

$$\begin{cases} -i\gamma H_\varphi = -i\omega\tilde{\epsilon}E_\rho - \omega\tilde{\chi}H_\rho, \\ i\gamma H_\rho - H'_z = -i\omega\tilde{\epsilon}E_\varphi - \omega\tilde{\chi}H_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho H_\varphi)' = -i\omega\tilde{\epsilon}E_z - \omega\tilde{\chi}H_z, \\ -i\gamma E_\varphi = i\omega\tilde{\mu}H_\rho - \omega\tilde{\chi}E_\rho, \\ i\gamma E_\rho - E'_z = i\omega\tilde{\mu}H_\varphi - \omega\tilde{\chi}E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' = i\omega\tilde{\mu}H_z - \omega\tilde{\chi}E_z, \end{cases} \quad (6)$$

и представим функции E_ρ, H_ρ, E_z, H_z через E_φ и H_φ , используя 1, 3, 4 и 6-е уравнение последней системы. Получаем выражения:

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{\gamma}{\omega} \frac{i\tilde{\chi}E_\varphi - \tilde{\mu}H_\varphi}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}, & E_z &= -\frac{1}{\omega\rho} \frac{\tilde{\chi}(\rho E_\varphi)' + i\tilde{\mu}(\rho H_\varphi)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}, \\ H_\rho &= \frac{\gamma}{\omega} \frac{i\tilde{\chi}H_\varphi + \tilde{\epsilon}E_\varphi}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}, & H_z &= -\frac{1}{\omega\rho} \frac{\tilde{\chi}(\rho H_\varphi)' - i\tilde{\epsilon}(\rho E_\varphi)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из данных формул видно, что поле в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$u_e := iE_\varphi(\rho), \quad u_m := H_\varphi(\rho). \quad (8)$$

Отсюда следует, что достаточно найти функции u_e и u_m – касательные компоненты электрического и магнитного полей. Всюду $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по ρ .

Для касательных компонент поля u_e и u_m имеем следующую задачу на собственные значения: требуется найти такие $\gamma \in \mathbb{C}$, для которых существуют нетривиальные решения системы дифференциальных уравнений

$$u_e'' + \tilde{h}_e u_e' + (\tilde{g}_e - \gamma^2)u_e = \tilde{f}_m(\rho u_m)' + \tilde{k}_m u_m,$$

$$u_m'' + \tilde{h}_m u_m' + (\tilde{g}_e - \gamma^2) u_m = \tilde{f}_e (\rho u_e)' + \tilde{k}_e u_e, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e &= \frac{\tilde{\epsilon}\tilde{\mu}'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}} + \frac{1}{\rho}, \quad \tilde{h}_m = \frac{\tilde{\epsilon}'\tilde{\mu}}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}} + \frac{1}{\rho}, \\ \tilde{g}_e &= \omega^2 (\tilde{\chi}^2 + \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\tilde{\epsilon}\tilde{\mu}'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}, \quad \tilde{g}_m = \omega^2 (\tilde{\chi}^2 + \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\tilde{\epsilon}'\tilde{\mu}}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}}, \\ \tilde{f}_e &= \frac{\tilde{\chi}\tilde{\epsilon}'}{\rho(\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu})}, \quad \tilde{f}_m = \frac{\tilde{\chi}\tilde{\mu}'}{\rho(\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu})}, \quad \tilde{k}_e = -2\omega^2 \tilde{\chi}\tilde{\epsilon}, \quad \tilde{k}_m = -2\omega^2 \tilde{\chi}\tilde{\mu}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие граничным условиям и условиям сопряжения на границах r_0 и r

$$\begin{aligned} u_e|_{r_0} = 0, u_m'|_{r_0} = 0, [u_e]_r = 0, [u_m]_r = 0, \\ \left[\frac{\tilde{\chi}(\rho u_e)' - \tilde{\mu}(\rho u_m)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}} \right]_r = 0, \quad \left[\frac{\tilde{\chi}(\rho u_m)' - \tilde{\epsilon}(\rho u_e)'}{\tilde{\chi}^2 - \tilde{\epsilon}\tilde{\mu}} \right]_r = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

условию ограниченности энергии поля во всякой конечной области и условию на бесконечности: для поверхностных волн: $u_e(\rho) \rightarrow 0$, $u_m(\rho) \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$; для вытекающих волн: $u_e(\rho) \rightarrow \infty$, $u_m(\rho) \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$.

Решив задачи (9)–(10) и найдя компоненты поля u_e и u_m , можно, подставив их в формулу (7), определить поперечные составляющие. Определенное так поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет всем условиям (1)–(4).

При $\rho > r$ имеем $\tilde{\epsilon}' = 0$ и $\tilde{\chi} = 0$, тогда из (9) получаем систему

$$\begin{aligned} (\rho u_e')' - \rho \left(\kappa^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) u_e &= 0, \\ (\rho u_m')' - \rho \left(\kappa^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) u_m &= 0, \end{aligned}$$

где $\kappa^2 = \gamma^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$.

Пользуясь тем, что у поверхностных волн электромагнитное поле затухает на бесконечности, получаем решение последней системы в виде

$$\begin{aligned} u_e(\rho; \gamma, m) &= C_1 K_1(\kappa \rho), \\ u_m(\rho; \gamma, m) &= C_2 K_1(\kappa \rho), \end{aligned} \quad (11)$$

где функция K_1 – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [9], C_1 и C_2 – постоянные.

В силу условия на бесконечности выбираем квадратный корень следующим образом:

$$\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c \mu_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\gamma^2 - \varepsilon_0 \mu_0| + \operatorname{Re}(\gamma^2 - \varepsilon_0 \mu_0)} + \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} \operatorname{sign} \operatorname{Im}(\gamma^2 - \varepsilon_0 \mu_0) \sqrt{|\gamma^2 - \varepsilon_0 \mu_0| - \operatorname{Re}(\gamma^2 - \varepsilon_0 \mu_0)}.$$

При $r_0 \leq \rho \leq r$ имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\rho)$, и из (9) мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} Lu_e &:= u_e'' + h_e u_e' + (g_e - \gamma^2) u_e = f_m(\rho u_m)' + k_m u_m, \\ Lu_m &:= u_m'' + h_m u_m' + (g_m - \gamma^2) u_m = f_e(\rho u_e)' + k_e u_e, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} h_e &= \frac{\varepsilon \mu'}{\chi^2 - \varepsilon \mu} + \frac{1}{\rho}, \quad h_m = \frac{\varepsilon' \mu}{\chi^2 - \varepsilon \mu} + \frac{1}{\rho}, \\ g_e &= \omega^2(\chi^2 + \varepsilon \mu) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\varepsilon \mu'}{\chi^2 - \varepsilon \mu}, \quad g_m = \omega^2(\chi^2 + \varepsilon \mu) - \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\varepsilon' \mu}{\chi^2 - \varepsilon \mu}, \\ f_e &= \frac{\chi \varepsilon'}{\rho(\chi^2 - \varepsilon \mu)}, \quad f_m = \frac{\chi \mu'}{\rho(\chi^2 - \varepsilon \mu)}, \quad k_e = -2\omega^2 \chi \varepsilon, \quad k_m = -2\omega^2 \chi \mu. \end{aligned}$$

Если известно решение вне волновода, то задача в неограниченной области может быть сведена к задаче на собственные значения на отрезке $[r_0, r]$. Введем следующее

Определение 5. Если существуют нетривиальные функции u_e и u_m , отвечающие некоторому $\gamma \in \mathbb{C}$, которые при $\rho > r$ определяются решениями (11), а при $r_0 \leq \rho \leq r$ являются решением системы уравнений (12), и функции u_e и u_m удовлетворяют условиям сопряжения (10), то γ называется характеристическим числом задачи.

Определение 6. Пару функций u_e и u_m , $|u_e|^2 + |u_m|^2 \not\equiv 0$, будем называть собственным вектором задачи, отвечающим характеристическому числу $\gamma \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. Если γ – характеристическое число задачи, то $-\gamma$, $\bar{\gamma}$ и $-\bar{\gamma}$ также являются характеристическими числами задачи с собственными векторами $(u_e, -u_m)$, $(\bar{u}_e, \bar{u}_m)$ и $(\bar{u}_e, -\bar{u}_m)$ соответственно.

2. Вариационная постановка

Будем искать решения u_e и u_m задачи в пространствах Соболева соответственно

$$H_0^1(r_0, r) = \left\{ f : f \in H^1(r_0, r), f|_{r_0} = 0 \right\} \text{ и } H^1(r_0, r)$$

со скалярным произведением и нормой:

$$(f, g)_1 = \int_{r_0}^r (f' \bar{g} + f \bar{g}') d\rho, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1 = \int_{r_0}^r (|f'|^2 + |f|^2) d\rho.$$

Здесь мы используем обозначение для пространства Соболева $H_0^1(r_0, r)$, не совпадающее со стандартным: в нашем случае $f|_{r_0} = 0$, но, вообще говоря, $f|_r \neq 0$. Очевидно, имеет место вложение $H_0^1(r_0, r) \subset H^1(r_0, r)$.

Для вариационной формулировки задачи умножим уравнения системы (12) соответственно на произвольные пробные функции v_e и v_m , считая их пока непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[r_0, r]$. Используя формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \bar{v} L u d\rho &= \int_{r_0}^r u'' \bar{v} d\rho + \int_{r_0}^r h u' \bar{v}' d\rho - \int_{r_0}^r (\gamma^2 - g) u \bar{v} d\rho = \\ &= u' \bar{v}|_{r_0}^r - \int_{r_0}^r u' \bar{v}' d\rho + \int_{r_0}^r h u' \bar{v}' d\rho - \int_{r_0}^r (\gamma^2 - g) u \bar{v} d\rho, \end{aligned} \quad (13)$$

где $u = u_j, v = v_j, h = h_j, g = g_j, j = e$ или m .

Применяя полученную формулу (13) отдельно для первого и второго уравнений системы (12) на отрезке $[r_0, r]$ и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r (\bar{v}_e L u_e + \bar{v}_m L u_m) d\rho &= -\gamma^2 \int_{r_0}^r (u_e \bar{v}_e + u_m \bar{v}_m) d\rho - \\ &- \int_{r_0}^r (u_e' \bar{v}_e' + u_m' \bar{v}_m') d\rho + \int_{r_0}^r (h_e u_e' \bar{v}_e' + h_m u_m' \bar{v}_m') d\rho + \\ &+ \int_{r_0}^r (g_e u_e \bar{v}_e + g_m u_m \bar{v}_m) d\rho + (u_e'(r) \bar{v}_e(r) + u_m'(r) \bar{v}_m(r)). \end{aligned} \quad (14)$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (12), имеем

$$\int_{r_0}^r (\bar{v}_e L u_e + \bar{v}_m L u_m) d\rho =$$

$$= \int_{r_0}^r \left(f_e (\rho u_e)' \bar{v}_m + f_m (\rho u_m)' \bar{v}_e \right) d\rho + \int_{r_0}^r (k_e u_e \bar{v}_m + k_m u_m \bar{v}_e) d\rho. \quad (15)$$

Так как решения (11) вне волновода известны, выразим из формул (10) нормальные производные на границе $\rho = r$:

$$\begin{aligned} u_e'(r) &= \kappa \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_e(r) + \kappa \frac{\chi}{\varepsilon_0} F(\gamma) u_m(r), \\ u_m'(r) &= \kappa \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_m(r) + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F(\gamma) u_e(r), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$F(\gamma) = -\frac{K_0(\kappa r)}{K_1(\kappa r)}.$$

Из (14), с учетом (15) и (16) получаем вариационное соотношение

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_{r_0}^r (u_e \bar{v}_e + u_m \bar{v}_m) d\rho + \int_{r_0}^r (u_e' \bar{v}_e' + u_m' \bar{v}_m' + u_e \bar{v}_e + u_m \bar{v}_m) d\rho - \\ & - \int_{r_0}^r ((g_e + 1) u_e \bar{v}_e + (g_m + 1) u_m \bar{v}_m) d\rho - \int_{r_0}^r (h_e u_e' \bar{v}_e + h_m u_m' \bar{v}_m) d\rho + \\ & + \int_{r_0}^r \left(f_e (\rho u_e)' \bar{v}_m + f_m (\rho u_m)' \bar{v}_e \right) d\rho + \int_{r_0}^r (k_e u_e \bar{v}_m + k_m u_m \bar{v}_e) d\rho + \\ & + \left(\kappa \left(\frac{\mu}{\varepsilon_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_e(r) + \kappa \frac{\chi}{\varepsilon_0} F(\gamma) u_m(r) \right) \bar{v}_e(r) + \\ & + \left(\kappa \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_m(r) + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F(\gamma) u_e(r) \right) \bar{v}_m(r) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Вариационное соотношение (17) получено для гладких функций v_e и v_m . Соотношение (17) распространяется на любые функции $v_e \in H_0^1(r_0, r)$, $v_m \in H^1(r_0, r)$ по непрерывности в силу ограниченности соответствующих квадратичных форм, что будет показано ниже.

Пусть $H = H_0^1(r_0, r) \times H^1(r_0, r)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1, \|\mathbf{u}\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

$$(\mathbf{u}) = (u_1, u_2)^T, (\mathbf{v}) = (v_1, v_2)^T, \quad u_1, v_1 \in H_0^1(r_0, r), \quad u_2, v_2 \in H^1(r_0, r).$$

Тогда интегралы, входящие в (17), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем $\mathbb{C}$, заданные на H от аргументов

$$\mathbf{u} = (u_e, u_m)^T, \mathbf{v} = (\bar{v}_e, \bar{v}_m)^T.$$

Эти формы определяют [10] некоторые линейные ограниченные операторы $T: H \rightarrow H$ по формуле

$$t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (T\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H, \quad (18)$$

при условии, что сами формы ограничены: $|t(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|T\mathbf{u}\|^2 = t(\mathbf{u}, T\mathbf{u}) \leq C \|\mathbf{u}\| \|T\mathbf{u}\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы:

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r (u_e \bar{v}_e + u_m \bar{v}_m) d\rho = (K\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$k_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r ((g_e + 1)u_e \bar{v}_e + (g_m + 1)u_m \bar{v}_m) d\rho = (K_1\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$\tilde{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r (k_e u_e \bar{v}_m + k_m u_m \bar{v}_e) d\rho = (\tilde{K}\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r (u'_e \bar{v}'_e + u'_m \bar{v}'_m + u_e \bar{v}_e + u_m \bar{v}_m) d\rho = (I\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r (h_e u'_e \bar{v}'_e + h_m u'_m \bar{v}'_m) d\rho = (B_1\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H,$$

$$b_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{r_0}^r (f_e (\rho u_e)' \bar{v}_m + f_m (\rho u_m)' \bar{v}_e) d\rho = (B_2\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H.$$

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\kappa \left(\frac{\mu}{\epsilon_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_e(r) + \kappa \frac{\chi}{\epsilon_0} F(\gamma) u_m(r) \right) \bar{v}_e(r) + \\ + \left(\kappa \left(\frac{\epsilon}{\mu_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) u_m(r) + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F(\gamma) u_e(r) \right) \bar{v}_m(r) = (S(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H. \quad (19)$$

Теперь вариационную задачу (17) можно записать в операторном виде:

$$(N(\gamma)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H$$

или эквивалентно

$$N(\gamma) := (\gamma^2 K + I - K_1 - B_1 + B_2 + \tilde{K} + S(\gamma))\mathbf{u} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) – операторная запись вариационного соотношения (17). Характеристические числа и собственные векторы N совпадают по определению с собственными значениями и собственными векторами исходной задачи на собственные значения на отрезке $[r_0, r]$.

3. Исследование спектра

Задача о поверхностных электромагнитных волнах в неоднородном открытом волноводе с киральным слоем свелась к изучению спектральных свойств оператор-функции N . Приведем следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в оператор-функцию $N(\gamma)$, которые понадобятся в дальнейшем (доказательство см. в [5, 6]).

Лемма 2. Ограниченные операторы K , K_1 и $\tilde{K}: H \rightarrow H$ являются компактными и $K > 0$.

Лемма 3. Операторы B_1 и $B_2: H \rightarrow H$ являются компактными.

Лемма 4. Оператор $S: H \rightarrow H$ является компактным.

Обозначим через $\xi(N)$ резольвентное множество оператор-функции $N(\gamma)$, т.е. совокупность тех $\gamma \in \mathbb{C}$, при которых оператор $N(\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Спектр $N(\gamma)$, будем обозначать через $\sigma(N)$; $\sigma(N) = \mathbb{C} \setminus \xi(N)$.

Теорема 1. Оператор-функция $N(\gamma): H \rightarrow H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Lambda} = \{\gamma: \operatorname{Im} \gamma^2 = 0, \gamma^2 \leq \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0\}$.

Доказательство. В области Λ оператор-функция $N(\gamma): H \rightarrow H$ является ограниченной и голоморфной. Оператор-функция $N(\gamma)$ фредгольмова как сумма обратимого I и компактных $K, K_1, B_1, B_2, \tilde{K}$ и S операторов.

Лемма 5. Существует $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $\tilde{N}(\gamma)$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\xi(N) := \{\gamma: \exists N^{-1}(\gamma): H \rightarrow H\}$ оператор-функции $N(\tilde{\gamma})$ не пусто; $\xi(N) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\gamma_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, тогда

$$\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим оператор-функцию $N(\gamma)$ на множестве $[\gamma_0, \gamma_0 + t)$ для некоторого $t > 0$. Эта функция непрерывна на указанном множестве в силу (19),

(20), выбора ветви квадратного корня и асимптотики функций при $z \rightarrow +0$ ($z \in R$):

$$K_0(z) \sim -\ln z, K_1(z) \sim \frac{1}{z}, F(\gamma_0) = 0.$$

Тогда если существует и ограничен оператор $N^{-1}(\gamma_0): H \rightarrow H$, то найдется такое $0 < t_0 < t$, что оператор $N^{-1}(\gamma_0 + t_0)$ также будет ограниченным и $\gamma_0 + t_0 \in \xi(N)$. Таким образом, в силу фредгольмовости $N(\gamma)$ достаточно доказать, что уравнение $N(\gamma_0)\mathbf{u} = 0$ имеет только тривиальное решение.

Варьируя функции v_e и v_m в (17), получаем, что выполнено (16). Тогда при $\gamma = \gamma_0$ (соответственно, $\kappa = 0$) и имеем $u'_e(r) = u'_m(r) = 0$. Подставляя эти выражения в условия сопряжения (10), нетрудно проверить, что при $\chi^2 \neq (\varepsilon(r) - \varepsilon_0)(\mu(r) - \mu_0)$ необходимо $u_e(r) = u_m(r) = 0$. Но тогда мы имеем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений второго порядка (9) с однородными (нулевыми) начальными условиями. Откуда в силу гладкости коэффициентов уравнений находим, что $u_e(r) \equiv u_m(r) \equiv 0$. Заметим, что точка $\gamma_0 + t_0$ лежит в области голоморфности оператор-функции $N(\gamma)$, поэтому непустота резольвентного множества доказана.

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \rightarrow H$ является дискретным в Λ , т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $K_0 \subset \Lambda$.

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием теоремы 1 и теоремы о голоморфной оператор-функции [11].

4. Проекционный метод

Используя вариационное соотношение (17), применим проекционный метод [12] для получения системы алгебраических уравнений. Разделим отрезок $[r_0, r]$ на n равных отрезков длиной $h = \frac{r - r_0}{n}$. Определим набор из n отрезков

$$\Phi_i = [r_0 + (i-1)h, r_0 + (i+1)h], i = 1, \dots, n-1 \text{ и } \Phi_n = [r_0 + (n-1)h, r]$$

и набор из $(n+1)$ отрезков

$$\Psi_1 = [r_0, r_0 + h], \Psi_j = [r_0 + (j-2)h, r_0 + jh], j = 2, \dots, n \text{ и } \Psi_{n+1} = [r_0 + (n-1)h, r].$$

Эти отрезки будем называть носителями.

В соответствии со схемой проекционного метода выберем базисные функции ϕ_i и ψ_j будем определять приближенное решение уравнения (18) как линейную комбинацию базисных функций. Базисные функции определены на носителях Φ_i и Ψ_j .

Базисные функции φ_i , определенные на Φ_i , имеют вид

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{\rho - r_0 - (i-1)h}{h}, & \rho < r_0 + ih, \\ -\frac{\rho - r_0 - (i+1)h}{h}, & \rho > r_0 + ih, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1} \quad (22)$$

и

$$\varphi_n = \frac{\rho - r + h}{l}. \quad (23)$$

Соответственно базисные функции ψ_j , определенные на Ψ_j , имеют вид

$$\psi_1 = -\frac{\rho^2 - 2r_0\rho + r_0^2 - h^2}{h^2}, \quad (24)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \frac{\rho^2 - 2r_0\rho + r_0^2}{h^2}, & \rho < r_0 + h, \\ -\frac{\rho - r_0 - 2h}{h}, & \rho > r_0 + h, \end{cases} \quad (25)$$

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{\rho - r_0 - (i-2)h}{h}, & \rho < r_0 + (i-1)h, \\ -\frac{\rho - r_0 - ih}{h}, & \rho > r_0 + (i-1)h, \end{cases} \quad j = \overline{3, n} \quad (26)$$

и

$$\psi_{n+1} = \frac{\rho - r + h}{h}. \quad (27)$$

Отметим, что так определенные базисные функции учитывают краевые условия (10). Приближенные решения рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$u_e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \quad u_m = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \psi_j, \quad (28)$$

где α_i, β_j – неизвестные коэффициенты.

Подставляя функции u_e и u_m вида (28) в вариационное соотношение (17), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно α_i и β_j (для фиксированного значения γ):

$$A(\gamma)x = 0, \quad (29)$$

где матрицы $A = A(\gamma)$ и x имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{ee}^{1,1} & \dots & A_{ee}^{1,n} & A_{em}^{1,1} & \dots & A_{em}^{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ee}^{n,1} & \dots & A_{ee}^{n,n} & A_{em}^{n,1} & \dots & A_{em}^{n,n+1} \\ A_{me}^{1,1} & \dots & A_{me}^{1,n} & A_{mm}^{1,1} & \dots & A_{mm}^{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{me}^{n+1,1} & \dots & A_{me}^{n+1,n} & A_{mm}^{n+1,1} & \dots & A_{mm}^{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix},$$

с коэффициентами

$$A_{ee}^{i,j} = \gamma^2 \int_{\Phi_i} \varphi_i \varphi_j d\rho + \int_{\Phi_i} \varphi'_i \varphi'_j d\rho - \int_{\Phi_i} g_e \varphi_i \varphi_j d\rho - \int_{\Phi_i} h_e \varphi'_i \varphi'_j d\rho + \\ + \kappa \left(\frac{\mu(r)}{\varepsilon_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) \varphi_i(r) \varphi_j(r), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$A_{em}^{i,j} = \int_{\Phi_i} \left(f_e(\rho \varphi_i)' + k_e \varphi_i \right) \psi_j d\rho + \kappa \frac{\chi}{\mu_0} F(\gamma) \varphi_i(r) \psi_j(r), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$A_{me}^{i,j} = \int_{\Phi_i} \left(f_m(\rho \psi_i)' + k_m \psi_i \right) \varphi_j d\rho + \kappa \frac{\chi}{\varepsilon_0} F(\gamma) \psi_i(r) \varphi_j(r), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$A_{mm}^{i,j} = \gamma^2 \int_{\Psi_i} \psi_i \psi_j d\rho + \int_{\Psi_i} \psi'_i \psi'_j d\rho - \int_{\Psi_i} g_m \psi_i \psi_j d\rho - \int_{\Psi_i} h_m \psi'_i \psi'_j d\rho + \\ + \kappa \left(\frac{\varepsilon(r)}{\mu_0} F(\gamma) - \frac{1}{r} \right) \psi_i(r) \psi_j(r), \quad i, j = \overline{1, n+1}.$$

Матрица A имеет размерность $(2n+1) \times (2n+1)$.

Обозначим через Δ определитель матрицы $A(\gamma)$:

$$\Delta(\gamma) \equiv \det A(\gamma).$$

Будем искать приближенные решения $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ как решения уравнения $\Delta(\tilde{\gamma}) = 0$. Если интервал $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ таков, что $\Delta(\underline{\gamma}) \times \Delta(\bar{\gamma}) < 0$, то это означает, что существует $\tilde{\gamma} \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$, которое является характеристическим числом пучка и, соответственно, постоянной распространения рассматриваемой задачи. За счет увеличения n это значение может быть вычислено с любой заданной точностью.

5. Численные результаты

В качестве модельной рассмотрим задачу со следующими параметрами: $r_0 = 2$, $r = 4$, $\varepsilon = 4 + \rho$, $\mu = 1$, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Дисперсионные кривые для

двух волн (графики зависимости нормированной постоянной распространения γ/ω от частоты ω) приведены на рис 2.

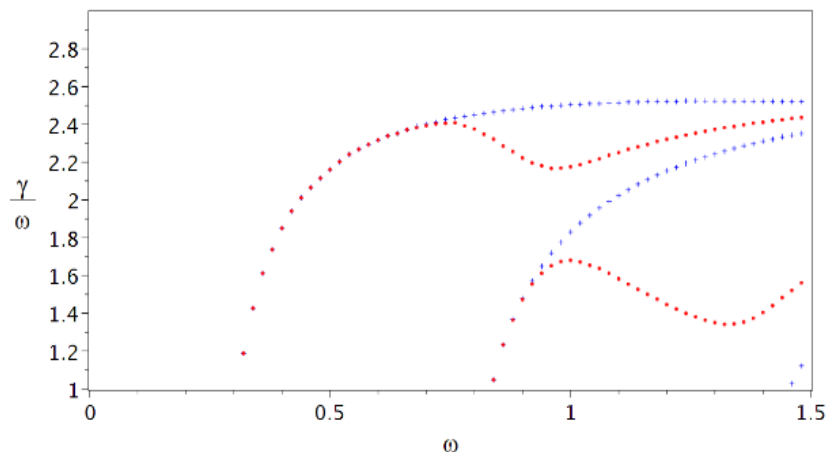


Рис. 2. Дисперсионные кривые. Красные точки соответствуют киральному заполнению волновода $\chi = 0,01$. Синие кривые соответствуют волноводу заполненному неоднородным диэлектриком $\chi = 0$

Рисунок 2 показывает, что киральное заполнение слоя в определенном диапазоне частот существенно влияет на свойства распространяющихся волн.

Предложенный метод позволяет вычислять характеристики волноводов кругового сечения с неоднородным киральным слоем.

Список литературы

1. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М. : Изд-во МГУ, 1989. – 189 с.
2. Смирнов Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 140–147.
3. Смирнов Ю. Г. Применение метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т. 312, № 3. С. 597–599.
4. Делицин А. Л. Об одном подходе к задаче о полноте системы собственных и присоединенных волн волновода // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 5. – С. 629–633.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
6. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. О дискретности спектра в задаче о нормальных волнах открытого неоднородного волновода // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 10. С. 1298–1309.
7. Неганов В. А., Осипов О. В. Рассеяние плоских электромагнитных волн на кирально-металлическом цилиндре // Письма в Журнал технической физики. 2000. Т. 26, № 1. С. 77–83.
8. Боголюбов А. Н., Мосунова Н. А., Петров Д. А. Физические эффекты в киральных волноведущих системах и их математическое моделирование // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 8. С. 914–924.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М. : Наука, 1979. – 832 с.

10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. – 740 с.
11. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1965. – С. 37–43.
12. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures, *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017. Vol. 22. P. 271–282.

References

1. Il'inskiy A.S., Shestopalov Yu.V. *Primenenie metodov spektral'noy teorii v zadachakh rasprostraneniya voln = Application of methods of spectral theory in problems of wave propagation*. Moscow: Izd-vo MGU, 1989:189. (In Russ.)
2. Smirnov Yu.G. The method of operator pencils in boundary value problems of conjugation for a system of elliptic equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1991;27(1):140–147. (In Russ.)
3. Smirnov Yu.G. Application of the method of operator beams to the problem of eigenwaves of a partially filled waveguide. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1990;312(3):597–599. (In Russ.)
4. Delitsin A.L. On the approach to the problem of completeness of the system of natural and associated waves of a waveguide. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2000;36(5):629–633. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: Inf. –izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
6. Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu. Discreteness of the spectrum in the problem of normal waves of an open inhomogeneous waveguide. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2017;53(10):1298–1309. (In Russ.)
7. Neganov V.A., Osipov O.V. *Rasseyaniye ploskikh elektromagnitnykh voln na kiral'no-metallicheskom tsilindre. Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Scattering of plane electromagnetic waves by a chiral metal cylinder. Letters to the Journal of Technical Physics*. 2000;26(1):77–83. (In Russ.)
8. Bogolyubov A.N., Mosunova N.A., Petrov D.A. *Fizicheskie efekty v kiral'nykh volnovodushchikh sistemakh i ikh matematicheskoe modelirovanie. Radiotekhnika i elektronika = Physical effects in chiral waveguide systems and their mathematical modeling. Radio engineering and electronics*. 2008;53(8):914–924. (In Russ.)
9. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam = Special functions reference*. Moscow: Nauka, 1979:839. (In Russ.)
10. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov = Perturbation theory of linear operators*. Moscow: Mir, 1972:740. (In Russ.)
11. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve = Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in a Hilbert space*. Moscow: Nauka, 1965:37–43. (In Russ.)
12. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures, *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017;22:271–282.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head
of the sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Евгений Юрьевич Смолькин

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Evgeniy Yu. Smol'kin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of mathe-
matics and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Поступила в редакцию / Received 10.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.01.2021

Принята к публикации / Accepted 29.01.2021

УДК 519.622

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

Численный метод решения задачи о распространении ТЕ-поляризованных волн в многослойном неоднородном волноводе кругового сечения, заполненном метаматериалом

Е. Д. Деревянчук¹, А. О. Лапич², М. О. Снегур³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

^{1,2}mmm@pnzgu.ru, ³snegur.max15@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью работы является численное исследование задачи о распространении ТЕ-поляризованных электромагнитных волн многослойной регулярной неоднородной волноведущей структуры со слоями из метаматериала. *Материалы и методы.* Проблема сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения численного решения задачи используется метод пристрелки по параметру. *Результаты.* Осуществлена реализация численного метода для решения задачи распространения электромагнитной волны в волноводе многослойного типа. Были получены численные результаты вычислений. *Выводы.* Примененный метод отлично подходит для нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн в структуре волновода.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, многослойный волновод, метаматериал, метод пристрелки

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта 20-11-20087.

Для цитирования: Деревянчук Е. Д., Лапич А. О., Снегур М. О. Численный метод решения задачи о распространении ТЕ-поляризованных волн в многослойном неоднородном волноводе кругового сечения, заполненном метаматериалом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 102–111. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

A numerical method for solving the problem of TE-polarized waves' propagation in a multilayer inhomogeneous circular waveguide filled with a metamaterial

E.D. Derevyanchuk¹, A.O. Lapich², M.O. Snegur³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

^{1,2}mmm@pnzgu.ru, ³snegur.max15@gmail.com

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to numerical study the problem of TE-electromagnetic waves' propagation in a multilayer regular waveguide structure with metamaterial layers. *Material and methods.* The problem boils down to solving the eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations. To achieve a numerical solution, the parameter shooting method is used. *Results.* A numerical method is implemented to solve the problem of an electromagnetic wave's propagation in a multilayer waveguide.

Numerical results were obtained. *Conclusions.* The applied method is excellent for finding an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves in the structure of a waveguide.

Keywords: propagation problem of electromagnetic waves, Maxwell's equations, TE-waves, differential equations, multilayer waveguide, metamaterial, shooting method

Acknowledgments: the research was financed by the RSF within the research project 20-11-20087.

For citation: Derevyanchyk E.D., Lapich A.O., Snegur M.O. A numerical method for solving the problem of TE-polarized waves' propagation in a multilayer inhomogeneous circular waveguide filled with a metamaterial. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:102–111. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-8

Введение

Применение новых композитных материалов и новых технологий в проектировании оптоэлектронных устройств привело к необходимости исследования новых классов задач электродинамики, в частности, многослойных волноведущих структур со вставками из метаматериала. Внедрение композитных материалов позволяет получить полезные качества для передачи. При этом основной задачей является изучение режимов распространения электромагнитных волн в таких изделиях [1–5].

В представленной работе рассматривается задача о распространении волн Н типа (ТЕ-волн), которые распространяются в многослойном открытом круглом волноводе со слоями из метаматериала. Физическая задача сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проверка метода и получение численных результатов основана на испытании серии неоднородных волноводов с различным заполнением слоев.

1. Постановка задачи

В качестве геометрической модели возьмем векторное пространство $\mathbb{R}^3$. В данном случае систему координат будем предполагать цилиндрической (ρ, φ, z) . Весь объем пространства заполнен изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_c \varepsilon_0 = \text{const}$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Многослойный волновод цилиндрической формы

$$W := \{(\rho, \varphi, z) : 0 \leq \rho < r_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup$$

$$\cup \{(\rho, \varphi, z) : r_1 \leq \rho \leq r_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \dots \cup \{(\rho, \varphi, z) : r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей линией, параллельной оси Oz , помещается в $\mathbb{R}^3$. Продолжение волновода по оси z – не ограничено. Его сечение, полученное в результате «разреза» волновода перпендикулярно данной оси, представляет собой окружности концентрической формы с радиусами $r_1, r_2, \dots, r_n$ (рис. 1). Заметим, что волновод является n -слойным.

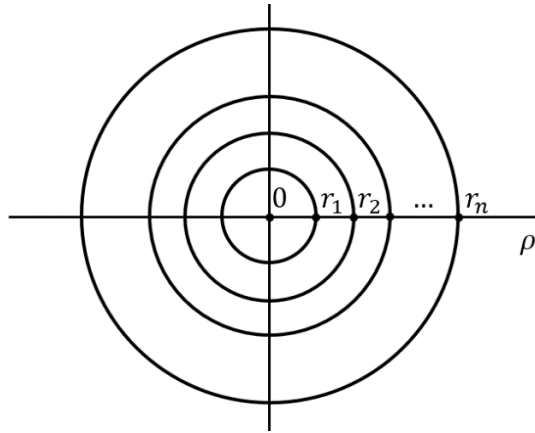


Рис. 1. Поперечное сечение волновода W

Магнитная проницаемость также постоянна и равна $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Комплексные амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ монохроматического электромагнитного поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi, E_z)^T, \mathbf{H} = (H_\rho, H_\varphi, H_z)^T. \quad (2)$$

Обозначение $(.)^T$ всюду предполагает операцию транспонирования.

Так как рассматриваются вытекающие волны, следует учитывать условие на бесконечности, которое сформулировано следующим образом: электромагнитное поле растет при $\rho \rightarrow \infty$; ω – круговая частота. Также необходимо выполнение условий непрерывности касательных компонент поля на границах контакта сред $\rho = r_1 \dots r_n$. Обозначение $(.)^T$ всюду предполагает операцию транспонирования. Решения уравнений Максвелла ищутся во всем пространстве.

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\epsilon = \tilde{\epsilon}\epsilon_0$, где

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_c, & 0 \leq \rho \leq r_1, \\ -\epsilon_1^2(\rho), & r_1 \leq \rho \leq r_2, \\ \epsilon_2^2(\rho), & r_2 \leq \rho \leq r_3, \\ \dots & \\ -\epsilon_{n-1}^2(\rho), & r_{n-1} \leq \rho \leq r_n, \\ \epsilon_c, & \rho \geq r_n. \end{cases} \quad (3)$$

Следовательно, рассматривается многослойный круглый открытый неоднородный волновод со слоями из метаматериала.

Рассмотрим ТЕ-волны в гармоническом режиме:

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, E_\varphi, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (H_\rho, 0, H_z)^T,$$

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho, \varphi, z), H_\rho = H_\rho(\rho, \varphi, z), H_z = H_z(\rho, \varphi, z).$$

В уравнения (1) впишем поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, тем самым получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega \epsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -i\omega \mu H_\rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\varphi)}{\partial \rho} = i\omega \mu H_z. \end{cases}$$

Анализируя предыдущую систему, видим, что компоненты H_z и H_ρ не зависят от φ . E_φ выражается через H_z и H_ρ . Можно сделать вывод о том, что E_φ также не зависит от φ .

Необходимые для решения задачи волны должны распространяться вдоль оси Oz волновода W с гармонической зависимостью от z . Отсюда можно записать компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ как

$$E_\varphi = E_\varphi(\rho) e^{i\gamma z}, H_\rho = H_\rho(\rho) e^{i\gamma z}, H_z = H_z(\rho) e^{i\gamma z},$$

где γ обозначает вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны), который нужно отыскать.

При этих условиях система представляется в виде

$$\begin{cases} i\gamma H_\rho(\rho) - (H_z(\rho))' = -i\omega \epsilon E_\varphi(\rho), \\ i\gamma E_\varphi(\rho) = -i\omega \mu H_\rho(\rho), \\ \frac{1}{\rho} (\rho E_\varphi(\rho))' = i\omega \mu H_z(\rho), \end{cases} \quad (4)$$

где $(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\rho}$.

Выразим компоненты H_z и H_ρ через E_φ из системы (4):

$$H_z(\rho) = \frac{1}{i\omega \mu \rho} (\rho E_\varphi(\rho))', H_\rho(\rho) = -\frac{\gamma}{\omega \mu} E_\varphi(\rho),$$

подставим найденные выражения в первое уравнение

$$\left(\frac{1}{\rho} (\rho E_{\varphi}(\rho))' \right)' + (\omega^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_{\varphi}(\rho) = 0.$$

Заменяя $u(\rho) := E_{\varphi}(\rho)$ и $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$, получим

$$\left(\rho^{-1} (\rho u)' \right)' + (k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u = 0. \quad (5)$$

В цилиндре $0 < \rho < r_1$ диэлектрическая проницаемость представлена в виде $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$. Получим уравнение Бесселя из формулы (5):

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (6)$$

Решив уравнение (6), мы получим

$$u = C_1 I_1(k_c \rho) + \tilde{C}_1 K_1(k_c \rho), \quad \rho < r_1.$$

Важным требованием является учет условия ограниченности поля во всякой конечной области. Из чего следует, что $\tilde{C}_1 = 0$ и решение примет вид

$$u = C_1 I_1(k_c \rho). \quad (7)$$

В оболочке волновода ($r_1 < \rho < r_n$) получим следующее уравнение:

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_i^2 u = 0, \quad k_i^2 = k_0^2 \varepsilon_i(\rho) - \gamma^2. \quad (8)$$

При $\rho > r_n$ получим

$$u'' + \rho^{-1} u' - \rho^{-2} u - k_c^2 u = 0, \quad k_c^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_c. \quad (9)$$

Так как рассматриваются вытекающие волны, для которых амплитуда поля возрастает при удалении от волновода в поперечном направлении, то решение (9) будет иметь вид

$$u = C_2 I_1(k_c \rho), \quad \rho > r_n. \quad (10)$$

Условия сопряжения для функций $u(\rho)$ и $u'(\rho)$ выглядят следующим образом:

$$[u]|_{\rho=r_i} = 0, \quad [u']|_{\rho=r_i} = 0. \quad (11)$$

Сформулируем задачу. Необходимо отыскать такие вещественные значения параметра γ , для которого будет существовать отличная от нуля функция u (зависящая от ρ), в свою очередь определяемая формулами (7) и (10); в оболочке волновода она будет удовлетворять уравнениям (8), а также принимать условия сопряжения на границах (11) и выполнять условия на бесконечности.

2. Численный метод вычисления собственных значений

Для исследования возьмем задачу Коши на сегменте $[r_1, r_2]$ для уравнения

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_1^2(\rho)u, \quad (12)$$

для которой будут использованы условия

$$u(r_1) = C_1 I_1(k_c r_1), \quad u'(r_1) = C_1 k_c \left(I_0(k_c r_1) - \frac{I_1(k_c r_1)}{k_c r_1} \right). \quad (13)$$

После чего возьмем новую («следующую») задачу Коши на отрезке $[r_2, r_3]$:

$$u'' = -\rho^{-1}u' + \rho^{-2}u - k_2^2(\rho)u. \quad (14)$$

Начальные условия будут иметь вид

$$u(r_2 + 0) = u(r_2 - 0), \quad u'(r_2 + 0) = u'(r_2 - 0), \quad (15)$$

$u(r_2 - 0)$ и $u'(r_2 - 0)$ здесь определяются из условий сопряжения на границе $\rho = r_2$, как решения предыдущей задачи Коши в точке $\rho = r_2$.

Решая вспомогательные задачи Коши на оставшихся отрезках $([r_3, r_4], \dots, [r_{n-1}, r_n])$, получаем значения $u(r_n - 0)$ и $u'(r_n - 0)$ на границе волновода.

Постоянную C_2 примем за единицу и, воспользовавшись условиями сопряжения на границе r_n (11), получим дисперсионное уравнение

$$\Delta(\gamma) \equiv u'(r_n) I_1(k_c r_n) - k_c u(r_n) \left(I_0(k_c r_n) - \frac{I_1(k_c r_n)}{k_c r_n} \right). \quad (16)$$

Необходимо рассмотреть функцию

$$F(\gamma) := u(r_n - 0; \gamma) - u(r_n + 0; \gamma).$$

Так как нам известны решения (10) и соответствующие условия сопряжения на r_n (11), то очевидно, что $F(r_n; \gamma) \equiv \Delta(\gamma)$.

Значения функции $F(\gamma)$ можно выразить только через значения решения задачи Коши (видно из формулы (16)). Пусть $\gamma = \tilde{\gamma}$ таково, что $F(\gamma) = 0$. Из этого следует вывод, что число $\tilde{\gamma}$ можно считать решением задачи, т.е. постоянной распространения.

Утверждение. Если существует отрезок $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \in [\gamma^*, \gamma^*]$, для которого $F(\underline{\gamma})F(\bar{\gamma}) < 0$, то постоянная распространения (одно собственное значение) $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ задачи будет существовать (хотя бы одно собственное значение).

При использовании рассматриваемого метода можно изобразить графики, которые показывают зависимость распространения γ от частоты f . Данная частота связана с циклической частотой ω при помощи равенства

$f = 2\pi\omega$. Кривые $\gamma = \gamma(f)$ такого типа также называют дисперсионными кривыми.

Возьмем $0 < f_* < f^* < \infty$. Также предположим, что $k_0^2 \sqrt{\epsilon_c} < \gamma_* < \gamma^* < \infty$ – некоторые числа. Полагаем $f \in [f_*, f^*]$, $\gamma \in [\gamma_*, \gamma^*]$.

Необходимо разбить отрезки $[f_*, f^*]$ и $[\gamma_*, \gamma^*]$ на n и m частей соответственно. Тогда имеем $\{f_i, \gamma_i\}$, $i = 0 \dots n$, $j = 0 \dots m$; к тому же $f_0 = f_*$, $f_n = f^*$, $\gamma_0 = \gamma_*$, $\gamma_m = \gamma^*$. Следующим шагом будет построение $F(f_i; \gamma_j)$:

$$F(f_i, \gamma_j) := u_{ij}(r_n - 0) - u_{ij}(r_n + 0).$$

Пусть для f_i будут существовать некоторые γ_j и γ_{j+1} , на основе которых

$$F(f_i; \gamma_j)F(f_i; \gamma_{j+1}) < 0.$$

Выходит, что имеется собственное значение $\tilde{\gamma}_j \in (\gamma_j, \gamma_{j+1}) < 0$, которое будет собственным значением для задачи о распространении волн в волноводной структуре. Такому значению отвечает толщина слоя f_i . Чтобы отыскать значение $\tilde{\gamma}_j$, можно воспользоваться широко известным методом дихотомии. Он полезен тем, что благодаря нему можно добиться высокой точности вычисления.

Создадим метод нахождения приближенного значения постоянной распространения, положив за основу метод половинного деления (МПД).

Следует задать погрешность $\delta > 0$. Используем отрезок $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$, удовлетворяющий неравенству

$$F(f_i, \underline{\gamma}_1)F(f_i, \bar{\gamma}_1) < 0.$$

Собственные значения $\tilde{\gamma}$ (искомое) и $\tilde{\gamma}_1$ (приближенное) должны принадлежать диапазону $(\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1)$.

Необходимо найти центральную точку отрезка γ_1 (т.е. его середину):

$$\gamma_1 = (\underline{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_1) / 2.$$

Вычислим функцию $F(f_i; \gamma_1)$ и проверим такие условия:

- Число γ_1 – искомое приближенное собственное значение, когда $|F(f_i; \gamma_1)|$ меньше и не равняется указанной погрешности.
- Собственное значение $\tilde{\gamma} \in (\underline{\gamma}_1, \gamma_1)$, если $F(f_i; \underline{\gamma}_1)F(f_i; \gamma_1)$ будет меньше нуля. Считая $\underline{\gamma}_n := \gamma_1$ и $\bar{\gamma}_n := \gamma_1$ получим, что $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$.
- Собственное значение $\tilde{\gamma} \in (\gamma_1, \bar{\gamma}_1)$, если $F(f_i; \gamma_1)F(f_i; \bar{\gamma}_1)$ будет меньше нуля.

Положив $\underline{\gamma}_n := \gamma_1$ и $\bar{\gamma}_n := \bar{\gamma}_1$, получим, что $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$.

Шаг за шагом используем МПД. Дойдя до n шага, мы обнаружим, что искомое приближенное значение $\tilde{\gamma}_n \in (\underline{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n)$. После этого станет понятно, что $|\bar{\gamma}_n - \gamma_n| = 2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \gamma_1|$.

Выберем число n такое, что неравенство $2^{-n} |\bar{\gamma}_1 - \gamma_1| < \delta$ будет выполняться. Тогда в качестве приближенного значения $\tilde{\gamma}_n$ постоянной распространения $\tilde{\gamma}$ можно принять, к примеру, центральную точку отрезка $[\underline{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1]$, т.е. $\tilde{\gamma}_n = (\bar{\gamma}_n + \underline{\gamma}_n) / 2$.

3. Численные результаты

Для получения численных результатов был использован метод, предложенный в предыдущем разделе.

Построены графики дисперсионных кривых. На их основе изучена зависимость спектрального параметра γ от циклической частоты ω .

На рис. 2 визуализированы графики дисперсионных кривых 4-слойного волновода, состоящего из однородных слоев. Слои с метаматериалом чередуются с заполненными диэлектриком слоями.

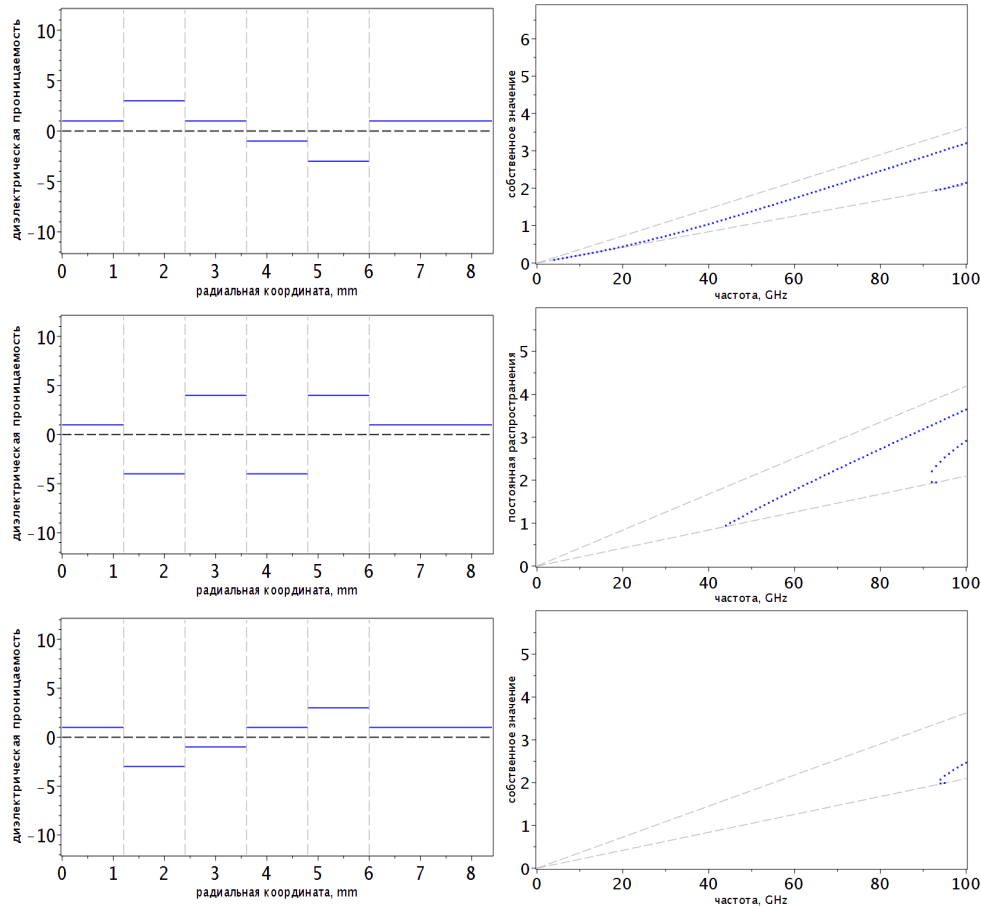


Рис. 2. Дисперсионные кривые и профили диэлектрической проницаемости

Заключение

Проведено численное исследование спектра задачи о ТЕ-поляризованных электромагнитных волнах многослойного волновода. Использование предложенного варианта метода может быть оправдано, когда проводится анализ однородных волноводов с n -слоями, а явное дисперсионное уравнение имеет очень сложную форму.

Для неоднородного волновода явное дисперсионное уравнение недоступно, и численное исследование спектра собственных значений может быть выполнено только численным методом, например, предложенным в этой работе. Проведенные эксперименты подтвердили правильность реализации данного метода, его сходимости и эффективность.

Список литературы

1. Solymar L. & Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford : Oxford University Press, 2009.
2. Veselago V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ // *Sov. Phys. Usp.* 1967. Vol. 10 (4). P. 509–514.
3. Smolkin E., Shestopalov Y., Snegur M. Surface Waves in a Nonlinear Metamaterial Rod // *Radio Science*. 2020. Vol. 55.
4. Smolkin E., Smirnov Y., Snegur M. Leaky waves in a nonlinear metamaterial rod // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2020. Vol 34. P. 1680–1690.
5. Snegur M., Smolkin E. Diffraction of TE Polarised Electromagnetic Waves by a Nonlinear Metamaterial Waveguide // 2020 33rd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science, URSI GASS 2020, 2020.

References

1. Solymar L. & Shamonina E. *Waves in Metamaterials*. Oxford: Oxford University Press, 2009.
2. Veselago V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp.* 1967;10(4):509–514.
3. Smolkin E., Shestopalov Y., Snegur M. Surface Waves in a Nonlinear Metamaterial Rod. *Radio Science*. 2020;55.
4. Smolkin E., Smirnov Y., Snegur M. Leaky waves in a nonlinear metamaterial rod. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2020;34:1680–1690.
5. Snegur M., Smolkin E. Diffraction of TE Polarised Electromagnetic Waves by a Nonlinear Metamaterial Waveguide. 2020 33rd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science, URSI GASS 2020, 2020.

Информация об авторах / Information about the authors

Екатерина Дмитриевна Деревянчук
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mmm@pnzgu.ru

Ekaterina D. Derevyanchuk
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor
of the sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Андрей Олегович Лапич

магистрант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Andrey O. Lapich

Master's degree student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Максим Олегович Снегур

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Maksim O. Snegur

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Поступила в редакцию / Received 10.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.12.2020

Принята к публикации / Accepted 18.01.2021

УДК 543.423

doi:10.21685/2072-3040-2021-1-9

Разработка метода лазерной искровой спектроскопии для задач геологоразведки и экологического мониторинга водных сред в режиме реального времени

Д. Ю. Прошенко¹, С. С. Голик², А. Ю. Майор³,
А. А. Ильин⁴, А. В. Боровский⁵, О. А. Букин⁶

^{1,2,3,4,5,6}Дальневосточный федеральный университет,
остров Русский, Приморский край, Россия

^{1,2,3,4}Институт автоматики и процессов управления
Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

¹dima.prsk@mail.ru, ²golik_s@mail.ru, ³mayor@iacp.dvo.ru,
⁴ilyin@iacp.dvo.ru, ⁵ifitfizik@gmail.com, ⁶o_bukin@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Освоение ресурсов континентального шельфа в настоящее время является приоритетной задачей. Одновременно важным аспектом остается обеспечение экологической безопасности морских акваторий. В данной связи являются актуальными разработка и создание роботизированных систем, оснащенных специализированными комплексами, способными решать широкий функциональный спектр подводных работ. Цель данной работы заключалась в создании аппаратно-программного комплекса на основе метода лазерной искровой спектроскопии с возможностью его интеграции на телеуправляемый подводный аппарат обследовательского класса для проведения измерений элементного состава морской воды и донных пород в режиме *In Situ*. *Материалы и методы.* Анализ элементного состава морской воды и проб грунта производился с помощью метода лазерной искровой спектроскопии. В качестве источника возбуждения лазерной плазмы использовался двухимпульсный лазер Nd:YAG с диодной накачкой DF-251 (SOL Instruments). *Результаты.* Разработан экспериментальный образец аппаратно-программного комплекса подводного спектрометра на основе метода лазерной искровой спектроскопии с возможностью его интеграции на существующие телеуправляемые необитаемые подводные аппараты обследовательского класса. Проведены лабораторные эксперименты по определению химического состава пробы морской воды. Показана возможность применения представленного аппаратно-программного комплекса в задачах экологического мониторинга морских акваторий и геологоразведки. *Выводы.* Полученные лабораторные результаты позволяют утверждать, что разработанный аппаратно-программный комплекс является перспективным решением для применения в задачах экологического мониторинга морских акваторий и геологоразведки.

Ключевые слова: спектроскопия, лазерная искровая спектроскопия, плазма, экологический мониторинг, геологоразведка

Финансирование: исследование поддержано проектом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации FZNS-2020-0003 № 0657-2020-0003.

Для цитирования: Прощенко Д. Ю., Голик С. С., Майор А. Ю., Ильин А. А., Боровский А. В., Букин О. А. Разработка метода лазерной искровой спектроскопии для задач геологоразведки и экологического мониторинга водных сред в режиме реального времени // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 112–119. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-9

Development of a laser-induced breakdown spectroscopy method for the issues of geological exploration and ecological monitoring of aquatic environments in real time

**D.Yu. Proshchenko¹, S.S. Golik², A.Yu. Mayor³,
A.A. Il'in⁴, A.V. Borovskiy⁵, O.A. Bukin⁶**

^{1,2,3,4,5,6}Far Eastern Federal University, Russky Island, Primorsky Kray, Russia

^{1,2,3,4}Institute of Automation and Control Processes

Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

¹dima.prsk@mail.ru, ²golik_s@mail.ru, ³mayor@iacp.dvo.ru,

⁴ilyin@iacp.dvo.ru, ⁵ifitfizik@gmail.com, ⁶o_bukin@mail.ru

Abstract. *Background.* Currently, the priority task is to develop the resources of the continental shelf. At the same time, ensuring the environmental safety of marine areas remains an important aspect. In this regard, the development and creation of robotic systems equipped with specialized complexes capable of solving a wide functional range of underwater operations is relevant. The purpose of this work is to create a hardware and software complex based on the method of laser-induced breakdown spectroscopy with the possibility of integrating it into a remotely operated underwater vehicle of the survey class for measuring the elemental composition of seawater and bottom rocks in the *In Situ* mode. *Materials and methods.* The analysis of the elemental composition of seawater and soil samples was carried out using the laser-induced breakdown spectroscopy method. A two-pulse diode-pumped Nd: YAG laser DF-251 (SOL Instruments) was used as a source of laser plasma excitation. *Results.* An experimental hardware and software complex of an underwater spectrometer based on the method of laser-induced breakdown spectroscopy with the possibility of integrating it into existing remotely operated underwater vehicle (ROV) of the inspection class has been developed. Laboratory experiments were carried out to determine the chemical composition of a seawater sample. The possibility of using the presented hardware and software complex in the tasks of environmental monitoring of sea areas and geological exploration is shown. *Conclusions.* The obtained laboratory results make it possible to assert that the developed hardware and software complex is a promising solution for application in the problems of environmental monitoring of sea areas and geological exploration.

Keywords: spectroscopy, laser induced breakdown spectroscopy, plasma, environmental monitoring, geological exploration

Acknowledgments: the research was supported by the project of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation FZNS-2020-0003 No. 0657-2020-0003.

For citation: Proshchenko D.Yu., Golik S.S., Mayor A.Yu., Il'in A.A., Borovskiy A.V., Bukin O.A. Development of a laser-induced breakdown spectroscopy method for the issues of geological exploration and ecological monitoring of aquatic environments in real time. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;1:112–119. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-9

Введение

В настоящее время постоянно увеличивающиеся темпы добычи полезных ископаемых на морском шельфе обуславливают поиск новых технических решений в области задач, связанных с геологоразведкой. В свою очередь особенно остро стоит вопрос экологической безопасности морских акваторий в связи с постоянно возрастающим негативным воздействием различных антропогенных факторов. Для оперативного предотвращения пагубных последствий необходимо своевременно проводить оценку критических нагрузок и изучение ассимиляционной емкости морских экосистем. Для этих целей являются актуальными разработка и создание роботизированных систем, оснащенных специализированными аппаратно-программными комплексами (АПК), способными проводить широкий функциональный спектр подводных работ. В качестве перспективного метода, позволяющего решать задачи в области геологоразведки и экологического мониторинга морских акваторий, может выступать метод лазерной искровой спектроскопии (ЛИС), основанный на принципах генерации лазерной плазмы как источника возбуждения атомных и молекулярных эмиссионных спектров. Метод ЛИС получил широкое распространение в лабораторных приложениях и натурных исследованиях как в условиях земной атмосферы, так и на космических аппаратах. На данный момент он применяется практически во всех областях, где необходимо оперативное и точное определение химического состава различных объектов: элементный анализ жидкостей, газов, аэрозолей и твердых тел; обнаружение следовых компонент загрязнителей воды, почвы и воздуха; видовой отбор биологических материалов, включая семена и бактерии; обнаружение взрывчатых веществ, а также компонент химического и биологического оружия, ядерных отходов [1]. С помощью модуля ChemCam, разработанного специально для космического аппарата Curiosity, были получены спектрометрические измерения, на основании которых были получены данные о наличии следов воды на поверхности Марса [2].

Несмотря на то, что работы по использованию метода ЛИС для анализа веществ начались достаточно давно [3], исследования, посвященные разработке метода для его использования в анализе морской подводной среды активно продолжаются и в настоящее время [4]. Для непосредственной реализации измерений химического анализа в подводных условиях возникает ряд существенных ограничивающих факторов [5].

Несмотря на это, например, в результате накопленного опыта группой специалистов Токийского университета был создан подводный измерительный комплекс ChemiCam (Chemical Camera) второго поколения [6]. ChemiCam – это устройство ЛИС (в англоязычной литературе – LIBS), разработанное Университетом Токио, Япония. Устройство обладает уникальной способностью выполнять в режиме *in situ* многоэлементный химический анализ как жидкостей, так и месторождений полезных ископаемых в океане на глубинах до 3000 м. Этот комплекс имеет два режима работы. В первом режиме лазер фокусируется непосредственно через линзу, установленную на крышке основного корпуса, и производятся спектроскопические измерения состава морской воды. Во втором режиме лазер излучается через волоконно-оптический кабель длиной 4 м и фокусируется с помощью оптической головки, которая может удерживаться манипулятором ROV. Эта установка исполь-

зается для проведения спектроскопических измерений месторождений полезных ископаемых. Натурные испытания по изучению химического состава морской воды и минеральных отложений были проведены в акваториях Японского моря на глубинах свыше 1000 м. Данные исследования продемонстрировали эффективность использования метода ЛИС для непосредственного бесконтактного исследования химического состава различных подводных объектов и хорошо согласовались с ранее полученными результатами. Данные обстоятельства позволяют говорить о благоприятной перспективе применения ЛИС-спектрометров в задачах геологоразведочных работ.

В свою очередь общим недостатком вышеперечисленных измерительных комплексов является необходимость применения подводных аппаратов-носителей рабочего класса, что делает эти системы малодоступными в широком практическом использовании за счет высокой стоимости, больших размеров и уникальности используемой аппаратуры. Также эти АПК разработаны для непосредственного управления специально обученным оператором, а вся окончательная постобработка полученных данных выполняется непосредственно после передачи ее на поверхность, что существенно снижает оперативность проведения измерений и ограничивает возможности существующих решений. В этой связи дальнейший тренд технических разработок в области подводных исследований должен быть направлен на создание аппаратно-программных комплексов с возможностью их интеграции на существующие телеуправляемые или автономные аппараты обследовательского класса. В данной статье представлен разработанный подводный аппаратно-программный комплекс ЛИС-спектрометра с возможностью установки на телеуправляемые необитаемые подводные аппараты (ТНПА) обследовательского класса.

1. Экспериментальная установка

Функциональная схема спектрометра и сам комплекс в сборе представлены на рис. 1.

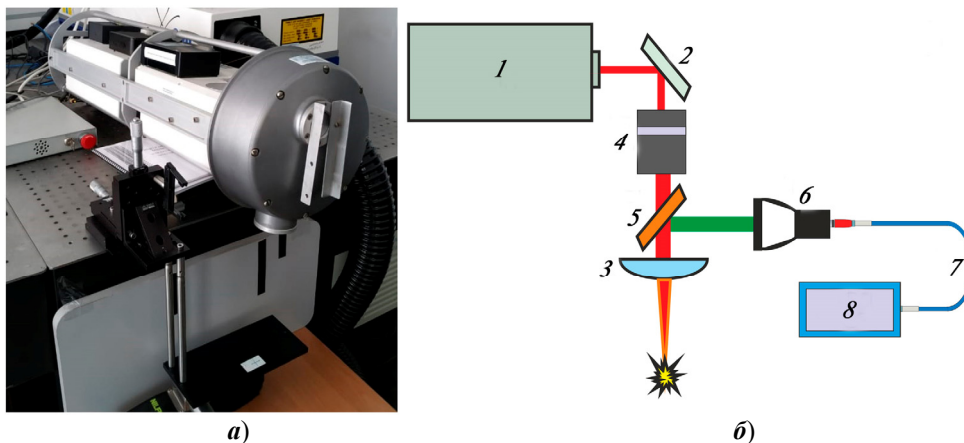


Рис. 1. АПК в сборе (а); схема подводного ЛИС-спектрометра (б)

Излучение на длине волны 1064 нм генерируется с помощью двухимпульсного лазера Nd:YAG с диодной накачкой DF-251 (SOL Instruments) /

с энергией импульса в каждом резонаторе 50 мДж. Лазер был специально разработан для использования в ЛИС-спектрометре на подводном аппарате, он позволяет осуществлять двухимпульсную схему возбуждения с шагом регулировки задержки между импульсами до 1 мкс. Частота следования импульсов может варьироваться от 1 до 20 Гц. Лазерные импульсы направляются на оптическую схему вывода излучения с помощью поворотного зеркала Thorlabs NB1-K14 2. Для фокусировки излучения в окружающую среду используется просветленная линза с фокусным расстоянием 50 мм Thorlabs LA4380-YAG 3. Для повышения контрастности эмиссионных линий перед линзой установлен коллиматор Thorlabs BE02-1064 4, на выходе которого формируется коллимированный лазерный пучок диаметром порядка 6 мм. Использование коллиматора позволяет снизить вероятность возникновения пробоя в оптических элементах схемы вывода излучения в окружающую среду, а также для увеличения интенсивностей эмиссионных линий химических элементов и, следовательно, улучшения пределов обнаружения используемого метода [7]. Для регистрации сигнала лазерной плазмы в оптическом диапазоне длин волн используется дихроичная пластина FF872-Di01-25x36x2.0 (Semrock) 5. Излучение в диапазоне длин волн 250–700 нм выделяется на входе коллиматора с помощью фильтра KG5 (на рис. 1 не показан) и далее с помощью коллиматора 6 и оптического световода 7 направляется в малогабаритный спектрометр Ocean Optics Maya 2000 Pro 8.

2. Результаты и обсуждение

Полученные спектры ЛИС в лабораторных условиях в объеме морской воды на границе вода–грунт представлены на рис. 2.

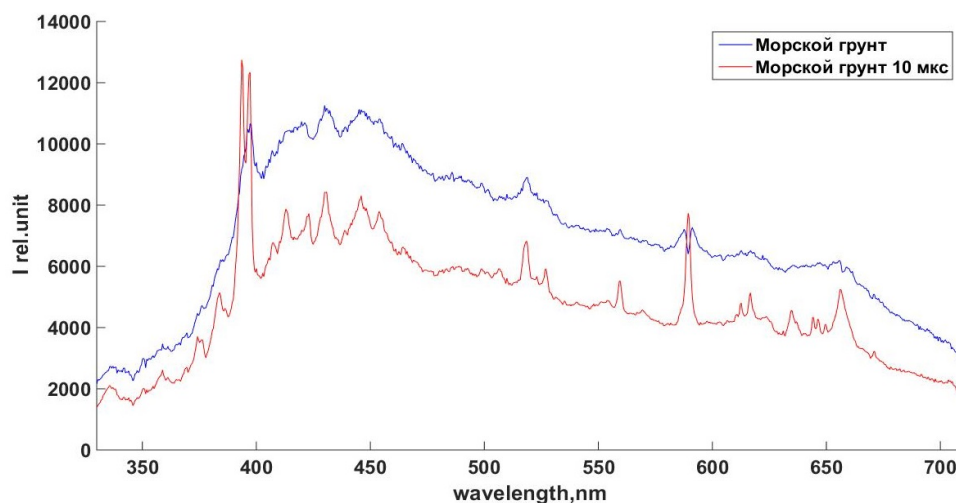


Рис. 2. Спектры ЛИС на границе морская вода–грунт

Согласно полученным результатам использование метода задержек между импульсами (рис. 2, синяя линия – два импульса без задержек относительно друг друга, суммарная энергия после фокусирующей линзы 90 мДж; красная линия – задержка между двумя импульсами – 10 мкс, энергия 45+45 мДж) приводит к снижению сплошного спектра лазерной плазмы и увеличению контрастности эмиссионных линий. Это обусловлено формиро-

ванием первым импульсом газового пузыря в объеме морской среды, в который с определенной задержкой фокусируется второй импульс, что в итоге позволяет реализовать механизмы, подобные ЛИС в атмосферных условиях. Расшифровка полученных спектров представлена в табл. 1.

Таблица 1

Граница морская вода–грунт

Элемент	Длина волны, нм	Элемент	Длина волны, нм
Mg I	383,8	Mg I / Ca I	518,4/518,9
Ca II	393,4	Ca I	527
Ca II	396,8	Ca I	558,9
Sr I	407,8	Na	588,9
Ca I	413,8	Ca I	612,2
Ca I	422,6	Ca I	616,6
Ca I	430,8	Ca I	636,2
Ca I	445,5	Ca I	643,9
Ca I	452,7	H _a	656

Заключение

Полученные лабораторные результаты позволяют утверждать, что разработанный аппаратно-программный комплекс является перспективным решением для применения в задачах экологического мониторинга морских акваторий и геологоразведки.

Список литературы

1. Hahn D. W., Omenetto N. Review of basic diagnostics and plasma–particle interactions: still-Laser-induced breakdown spectroscopy (LIBS), part I: review challenging issues within the analytical plasma community // *Applied spectroscopy*. 2010. Vol. 64, № 12. P. 335A–366A.
2. Martínez G. M., Renno N. O. Water and brines on Mars: current evidence and implications for MSL // *Space Science Reviews*. 2013. Vol. 175, № 1–4. P. 29–51.
3. Damon E. K., Tomlinson R. G. Observation of ionization of gases by a ruby laser // *Applied Optics*. 1963. Vol. 2. C. 546–547.
4. Tian Y., Hou S., Wang L., Duan X., Xue B., Lu Y. CaOH Molecular Emissions in Underwater Laser-Induced Breakdown Spectroscopy: Spatial–Temporal Characteristics and Analytical Performances // *Analytical chemistry*. 2019. Vol. 91, № 21. P. 13970–13977.
5. Sakka T., Takatani K., Ogata Y. H., Mabuchi M. Laser ablation at the solid – liquid interface: transient absorption of continuous spectral emission by ablated aluminium atoms // *Journal of Physics D : Applied Physics*. 2001. Vol. 35, № 1. P. 65.
6. Thornton B., Takahashi T., Sato T. Development of a deep-sea laser-induced breakdown spectrometer for in situ multi-element chemical analysis // *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. 2015. Vol. 95. P. 20–36.
7. Golik S. S., Ilyin A. A., Kolesnikov A. V. The influence of laser focusing on the intensity of spectral lines in femtosecond laser-induced breakdown spectroscopy of liquids // *Technical Physics Letters*. 2013. Vol. 39, № 8. P. 702–704.

References

1. Hahn D.W., Omenetto N. Review of basic diagnostics and plasma–particle interactions: still-Laser-induced breakdown spectroscopy (LIBS), part I: review challenging is-

- sues within the analytical plasma community. *Applied spectroscopy*. 2010;64(12): 335A–366A.
2. Martínez G.M., Renno N.O. Water and brines on Mars: current evidence and implications for MSL. *Space Science Reviews*. 2013;175(1–4):29–51.
 3. Damon E.K., Tomlinson R.G. Observation of ionization of gases by a ruby laser. *Applied Optics*. 1963;2:546–547.
 4. Tian Y., Hou S., Wang L., Duan X., Xue B., Lu Y. CaOH Molecular Emissions in Underwater Laser-Induced Breakdown Spectroscopy: Spatial–Temporal Characteristics and Analytical Performances. *Analytical chemistry*. 2019;91(21):13970–13977.
 5. Sakka T., Takatani K., Ogata Y.H., Mabuchi M. Laser ablation at the solid – liquid interface: transient absorption of continuous spectral emission by ablated aluminium atoms. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2001;35(1):65.
 6. Thornton B., Takahashi T., Sato T. Development of a deep-sea laser-induced breakdown spectrometer for in situ multi-element chemical analysis. *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. 2015;95:20–36.
 7. Golik S.S., Ilyin A.A., Kolesnikov A.V. The influence of laser focusing on the intensity of spectral lines in femtosecond laser-induced breakdown spectroscopy of liquids. *Technical Physics Letters*. 2013;39(8):702–704.

Информация об авторах / Information about the authors

Дмитрий Юрьевич Проценко

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10); инженер-программист, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5)

E-mail: dima.prsk@mail.ru

Dmitriy Yu. Proshchenko

Candidate of physical and mathematical sciences, senior staff scientist, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia); programming engineer, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (5 Radio street, Vladivostok, Russia)

Сергей Сергеевич Голик

кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10); старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5)

E-mail: golik_s@mail.ru

Sergey S. Golik

Candidate of physical and mathematical sciences, leading researcher, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia); senior staff scientist, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (5 Radio street, Vladivostok, Russia)

Александр Юрьевич Майор

доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10); ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5)

E-mail: mayor@iacp.dvo.ru

Алексей Анатольевич Ильин

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10); старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5)

E-mail: ilyin@iacp.dvo.ru

Антон Валерьевич Боровский

аспирант, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10)

E-mail: ifitfizik@gmail.com

Олег Алексеевич Букин

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Дальневосточный федеральный университет (Россия, Приморский край, остров Русский, поселок Аякс, 10)

E-mail: o_bukin@mail.ru

Aleksandr Yu. Mayor

Doctor of engineering sciences, leading researcher, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia); leading researcher, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (5 Radio street, Vladivostok, Russia)

Aleksey A. Il'in

Candidate of physical and mathematical sciences, leading researcher, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia); senior staff scientist, Institute of Automation and Control Processes of the Far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences (5 Radio street, Vladivostok, Russia)

Anton V. Borovskiy

Postgraduate student, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia)

Oleg A. Bukin

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher, Far Eastern Federal University (10 Ajax bay, Russian Island, Primorsky Kray, Russia)

Поступила в редакцию / Received 25.11.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020

Ю Б И Л Е И

К семидесятилетию со дня рождения Потапова Александра Алексеевича



А. А. Потапов – доктор физико-математических наук, профессор, известный ученый в области радиофизики и радиолокации, статистической радиотехники, распознавания и обработки изображений и сигналов, фрактального и текстурного анализа, дробных операторов, фрактальной электродинамики, фрактальных антенн и детерминированного хаоса.

Александр Алексеевич Потапов родился 4 мая 1951 г. в селе Лукино Ржаксинского района Тамбовской области. После окончания с золотой медалью средней школы в 1968 г. он поступил на радиотехнический факультет в Рязанский радиотехнический институт. Затем в 1979 г. окончил вечернее

отделение (инженерный поток) физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

С 1979 г. А. А. Потапов работает в Институте радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук. Александр Алексеевич прошел все ступени от младшего до главного научного сотрудника. В 1989 г. он защитил кандидатскую диссертацию по спецтеме в Московском физико-техническом институте, а в 1994 г. – докторскую диссертацию в Институте радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук на тему «Синтез изображений земных покровов в оптическом и миллиметровом диапазонах волн».

С 1979 г. главное научное направление А. А. Потапова – применение теории фракталов, дробных операторов, эффектов скейлинга и детерминированного хаоса в радиофизике, радиолокации, радиоэлектронике, электродинамике, теории управления и широкого спектра смежных научных и технических направлений для создания и развития прорывных информационных технологий. Сейчас он работает над совмещением фракталов, фотоники и нанотехнологий. А. А. Потапов – инициатор постановки первых НИР и ОКР в России по радиофизическим применениям теории фракталов, скейлинговых эффектов и дробных операторов в радиосистемах.

Результаты научной деятельности А. А. Потапова по фрактальной обработке информации в интенсивных помехах, а также по фрактальным радиосистемам, датчикам и фрактальным радиоэлементам опубликованы в че-

тырех отчетных докладах Президиума Российской академии наук (Научные достижения РАН. М.: Наука, 2008, 2010, 2012 и 2013), а также в докладе Правительству Российской Федерации (М.: Наука, 2012). Все эти приоритетные в мире результаты позволяют перейти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей.

В настоящее время на основе пионерских работ А. А. Потапова и его учеников в ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН сформировано новое фундаментальное направление «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: проектирование фрактальных радиосистем» и создана Российская научная школа фрактальных методов, хорошо известная в мире.

А. А. Потапов – ученый секретарь диссертационного совета при ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН (1999–2018). Дважды (1997 и 2000) ему присуждалась Государственная научная стипендия. Он заместитель председателя научно-квалификационного семинара «Проблемы современной радиофизики» и член научно-квалификационного семинара «Информатика» в ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. В период с 2000 по 2002 г. А. А. Потапов – профессор МИРЭА (Российского технологического университета), с 2008 по 2019 г. – профессор Казанского государственного технического университета имени А. Н. Туполева. Член Нижегородского математического общества (2017). В 2015 г. А. А. Потапов избран действительным членом Вневедомственного экспертного совета по проблемам воздушно-космической сферы.

За период его работы в ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН было дано надежное физическое обоснование практического применения фрактальных методов в современных областях радиофизики, радиоэлектроники и информационно-управляющих систем; впервые предложена и доказана эффективность и перспективность применения теории дробной меры, теории размерности и скейлинговых соотношений (для текстуры и фракталов) в случае обнаружения и распознавания (фильтрации) одномерных и многомерных радиолокационных сигналов от малококонтрастных целей на фоне интенсивных негауссовских помех разного рода. Им предложена концепция создания принципиально новых фрактальных радиосистем, фрактальных датчиков и фрактальной элементной базы. В ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН в 2005 г. создан действующий макет первого в мире фрактального непараметрического обнаружителя радиолокационных сигналов. Проведен строгий электродинамический расчет многочисленных типов фрактальных антенн, принципы конструирования которых лежат в основе фрактальных частотно-избирательных поверхностей и объемов (фрактальные «сэндвичи»). Впервые предложена и реализована модель «фрактального» конденсатора как фрактального импеданса и фрактальные лабиринты для синтеза СВЧ-структур. В 1997 г. впервые разработаны методы фрактальной модуляции и фрактальные широкополосные сигналы. Впервые предложен новый класс информативных признаков, основанный на тонкой структуре отраженных радиолокационных сигналов миллиметрового диапазона радиоволн, а также исследованы полные ансамбли текстурных признаков оптических и радиолокационных изображений реальных земных покровов. Предсказано наличие странного аттрактора, контролирующего радиолокационное рассеяние от растительных покровов. Впоследствии (2002) эффект был обнаружен экспериментально на длине волны 2,2 мм.

В 2015 г. А. А. Потаповым впервые в мировой практике открыты, предложены, обоснованы и разработаны принципы нового вида и нового метода радиолокации, а именно фрактально-скейлинговой или масштабно-инвариантной радиолокации. Доказана эффективность функционалов, которые определяются топологией, дробной размерностью и текстурой принятого многомерного сигнала, для синтеза принципиально новых неэнергетических обнаружителей малоконтрастных объектов на фоне помех. Разработаны постулаты фрактальной радиолокации:

1) интеллектуальная обработка сигнала/изображения, основанная на теории дробной меры и скейлинговых эффектов, для расчета поля фрактальных размерностей D ;

2) выборка принимаемого сигнала в шумах относится к классу устойчивых негауссовых распределений вероятностей D сигнала;

3) максимум топологии при минимуме энергии входного случайного сигнала (т.е. максимальный «уход» от энергии принимаемого сигнала). Это влечет за собой коренные изменения в структуре теоретической радиолокации, а также в ее математическом аппарате.

А. А. Потапов – автор первой в России монографии «*Фракталы в радиофизике и радиолокации*» (М.: Логос, 2002. 664 с.), которая была переработана и дополнена (Потапов А. А. *Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки*. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.). Эти две монографии стали настольными книгами ученых самых разных специальностей. А. А. Потапов – автор и соавтор ряда монографий по вопросам радиолокации и применения фракталов в науке и технике.

Чтение лекций по разработанным А. А. Потаповым в ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН фрактальным технологиям и доклады по проекту МНТЦ (совместно с ЦКБ «Алмаз») в 2000 и 2005 гг. в США (Вашингтон, Нью-Йорк, Хантсвилл, Атланта, Франклин), в Китае (2011 г. и по настоящее время) и на многочисленных международных конференциях (Англия, США, Канада, Голландия, Австрия, Германия, Франция, Испания, Италия, Венгрия, Греция, Турция, Шотландия, Швейцария, Швеция, Мексика, Китай, Сербия, Черногория, Болгария, Казахстан, Белоруссия, Украина) принесли ему широкую известность в кругах международной научной общественности. В 2005 г. в США состоялась знаменательная встреча А. А. Потапова с основателем фрактальной геометрии Б. Б. Мандельбротом, горячо поддержавшим работы А. А. Потапова.

А. А. Потапов опубликовал лично и в соавторстве свыше 1150 научных работ в отечественных и международных изданиях, включая более 45 монографий и глав в книгах на русском и английском языках, 2 патента и 9 учебных пособий. Им разработан курс лекций по применению фракталов и вейвлетов в радиолокации для Центра подготовки специалистов Концерн РТИ Системы (РТИ имени академика А. Л. Минца и ОАО НПК НИИДАР). Почетный профессор Евразийского национального университета (Астана, Казахстан, 2010), Почетный профессор Джинанского университета (Honorary Professor of Jinan University, г. Гуанчжоу, Китай, 2011). В марте 2012 г. А. А. Потапов назначен президентом китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов. Он также входит в состав оргкомитетов многочисленных международных и российских

конференций. В 1997 г. награжден медалью «В память 850-летия Москвы», награжден знаком «Почетный радист РФ» (2006) и восемнадцатью медалями. Лауреат Премии имени академика А. М. Прохорова (2013) и Премии Вневедомственного экспертного совета по вопросам воздушнокосмической сферы (2016).

А. А. Потапов – организатор и главный редактор журнала «Нелинейный мир» (2003), член редколлегий и редакционных советов 13 российских и международных журналов. Биография Александра Алексеевича опубликована в энциклопедии «Who is Who в России» (Verlag für Personenzyklopadien AG – Швейцария) по личной просьбе Издательства (2009–2010).

А. А. Потапов – академик Российской академии естественных наук по отделению проблем радиоэлектроники, нанофизики и информационным технологиям, академик Академии инженерных наук имени А. М. Прохорова.

Высокая научная эрудиция, работоспособность, принципиальность, целеустремленность, ответственность и всепоглощающая любовь к науке принесли А. А. Потапову заслуженный авторитет и широкую известность среди ученых.

Друзья, коллеги и ученики поздравляют Александра Алексеевича Потапова со славным юбилеем и горячо желают ему здоровья, новых успехов, долгих лет и плодотворной работы!

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные специальности журнала:
01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
01.01.07 Вычислительная математика
01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика
01.04.02 Теоретическая физика
01.04.05 Оптика
01.04.10 Физика полупроводников
01.04.15 Физика и технология наноструктур, атомная и молекулярная физика
01.04.16 Физика атомного ядра и элементарных частиц

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. (841-2) 64-32-89. E-mail: VolgaVuz@mail.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата « ____ » _____ 20__ г.